Technische Physik

für FTM1

Inhaltsverzeichnis

Dynamik

Seitenumbruch

Lehrplan FTM

Schulart: Fachschule für Technik | Fach: Technische Physik
Fachrichtung: Maschinentechnik | Stand: 05.05.99

1	**Kinematik**		**10 Stunden**
1.1	Bewegungsabläufe grafisch und rechnerisch bestimmen	Gleichförmige Bewegung Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	Translation Rotation
2	**Dynamik**		**10 Stunden**
2.1	Die Wirkung von Kräften auf den Bewegungszustand von Körpern, Berechnungen durchführen	Trägheitsgesetz Grundgleichung der Dynamik erklären Wechselwirkungsgesetz Zentripetalkraft	
2.2	Das Auftreten von Trägheitskräften in beschleunigten Bezugssystemen erläutern, Trägheitskräfte berechnen	Translation Rotation Prinzip von d'Alembert	
3	**Arbeit, Energie, Leistung**		**10 Stunden**
3.1	Die Abhängigkeit der Arbeit von Kraft und Weg erläutern, Berechnungen durchführen	Verschiebearbeit gegen die - Schwerkraft, - Reibungskraft, - Federkraft Beschleunigungsarbeit	
3.2	Den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie erläutern	Energiebegriff	
3.3	Die Definition der Leistung erläutern, Berechnungen durchführen	Leistung: - mittlere, - momentane Wirkungsgrad	
4	**Grundlagen der Elektrotechnik und der Elektronik**		**35 Stunden**
4.1	Elektrischen Gleichstromkreis aufbauen und berechnen, Messschaltungen auswerten	Stromgrößen Leistung, Arbeit	
4.2	Schutzmaßnahmen erklären	Gefahren, Sicherheitsregeln, Schutzmaßnahmen	
4.3	Funktionsweise und Anwendung elektronischer Bauelemente erläutern, Grundschaltungen aufbauen	Werkstoffe Bauelemente Kennlinien	
5	**Statik der Flüssigkeiten und Gase**		**10 Stunden**
5.1	Die Druckausbreitung bei Flüssigkeiten und Gasen beschreiben und Berechnungen durchführen	Druckdefinition Druckmessung Kraftwandler, Druckwandler Schweredruck	
5.2	Auftriebskräfte erklären und Berechnungen durchführen	Archimedisches Prinzip	
5.3	Den Zusammenhang zwischen Druck und Volumen bei Gasen erklären	Gesetz von Boyle-Mariotte	
6	**Wärmedehnung**		**5 Stunden**
6.1	Ausdehnung von Körpern bei Temperaturänderungen beschreiben und Berechnungen durchführen	Temperatur Ausdehnung - Festkörper - Flüssigkeiten	Wärmespannungen
7	**Energiebilanzen**		**30 Stunden**
7.1	Die Energieerhaltung in abgeschlossenen Systemen beschreiben, Energiebilanzen für verschiedene physikalische Systeme aufstellen und berechnen	Mechanischer Schwinger Strömendes Medium Thermisches System	Freie und erzwungene Schwingung Grafische Bestimmung der mech. Arbeit
8	**Statik mit Reibung**		**30 Stunden**
8.1	Das Wechsel wirkungsgesetz auf Maschinenteile im Gleichgewicht anwenden, Kräfte ermitteln	Zentrales Kräftesystem Allgemeines Kräftesystem	
8.2	Einflussgrößen auf die Reibung erläutern, Reibungskräfte berechnen	Haftreibung Gleitreibung	
9	**Festigkeitslehre**		**40 Stunden**
9.1	Beanspruchung als Folge von Belastung erläutern	Beanspruchungsarten, Spannung , Belastungsfälle	
9.2	Zusammenhänge zwischen Kraft, Spannung, gefährdetem Querschnitt und Verformung bei verschiedenen Beanspruchungsarten erläutern, Bauteile dimensionieren und Spannungsnachweis führen	Zug Druck Flächenpressung Schub Biegung Torsion Zusammengesetzte Beanspruchung	-
9.3	Zulässige Spannung ermitteln	Festigkeitskennwerte Festigkeitsmindernde Einflüsse Sicherheit	Zugversuch Dauerschwingversuch Kerbschlagbiegeversuch
	Zeit für Leistungsfeststellung und zur mögliche Vertiefung		**60 Stunden**
			240 Stunden

Seitenumbruch

Statik: Mögliche Einführung

Zusammenhang zw.
Kraft und Beschleunigung

Die 3 Prinzipien der Trägheit, der Aktion und der Reaktion entsprechen den 3 Newtonschen Axiomen [Tipler 1995]. Das 1. Axiom wurde schon von Galilei gefunden [Böge, Techn. Mechanik]

FTM, MVK: ca. 90' Zeitbedarf (ca. 45' ohne Übungen)
TG: entfällt

Wenn der Sachverhalt neu ist, wird die Aufnahmekapazität der Schüler erreicht. Danach sollte das Thema gewechselt oder Rechenübungen eingeschoben werden.

Newton 1: Trägheitsprinzip

(1. Newton'sches Axiom) Das Trägheitsgesetz meint den Zustand ohne zusätzliche Kräfte, bei dem ein Körper träge in seinem Bewegungszustand verharrt [1].

Ohne Kraft keine Bewegungsänderung (= Trägheit)
Bewegungsänderung (= Beschleunigung) benötigt eine (resultierende) Kraft
= Beschleunigen
= Bremsen (= negative Beschleunigung)
= Kurvenfahren (= Fliehkraft, Querbeschl.)

AM Kreidekästchen auf einer hochgelegenen Fläche

1) Was wird benötigt, das Kreidekrästchen zu bewegen ?⇒Kraft
Bei Antworten wie Finger o.ä.: es geht auch ohne Finger.
Demo: Kreidekrästchen mit Finger (= Kraft) anschubsen

2) Wie lange bleibt die Bewegung erhalten ? ⇒ohne Reibung ewig
Viele Schüler meinen aus der Erfahrung mit der allgegenwärtigen Reibung, dass Bewegung nur aufrechterhalten wird, solange eine Kraft wirkt. Zur Demo:
Demo: Pendel (Taschenmesser) pendelt nach einem Schubs sehr lange

3) Wodurch wird die Bewegung verlangsamt ? ⇒ durch Reibung
4) Wie lange dauert eine Bewegung ohne Reibung oder Antrieb?
5) Vertiefung: Wie kann man beschreiben, was Beschleunigung ist ? Bei welchen 3 Gelegenheit übt ein Kfz Kraft auf die Mitfahrer aus ? ⇒Beschleunigen, Bremsen, Kurvenfahrt

Newton 2: Aktionsprinzip

(oder dynamisches Grundgesetz)
(2. Newton'sches Axiom) .Je größer die Masse und je größer die Beschleunigung ist, desto größer ist die (result.) Kraft und umgekehrt:

$$Kraft = Masse \cdot Beschleunigung$$
$$F = m \cdot a$$
$$[N] = [kg \frac{m}{s^2}]$$

Kraft = Masse x Beschleunigung

1) Ist die Beschleunigung eines Porsche und eines 38t bei gleicher Kraft (Drehmoment) gleich groß ?⇒hängt noch von der Masse ab
2) Einheit m/s²: Ein Kfz beschleunige von 0 auf 100km/h in 5s:
Folgerung: Ein Porsche beschleunigt am schnellsten, wenn man ihn fallen lässt. Das erste s kommt aus der Geschwindigkeit, das 2. aus der Änderung der Geschwindigkeit (pro Zeit).

$$a = \frac{100\,km/h}{5s} = \frac{100000\,m}{3600\,s \cdot 5s} = 5{,}6\frac{m}{s^2}$$

Die Formulierung Newtons war weitsichtig. Er hat nicht nur die Beschleunigung mit dv/dt umfassender formuliert, sondern auch die Möglichkeit der Massenänderung eingebaut.

$$\vec{F} = \frac{dm \times v}{dt}$$

Gewichtskraft

Die Erde beschleunigt alle Körper gleich

$F_G = G = m \cdot g$ Gewichtskraft

$g = 9{,}81\frac{m}{s^2} \approx 10\frac{m}{s^2}$ Erdbeschleunigung

das bedeutet:

$$10\,N = 10\frac{m}{s^2} \cdot 1\,kg$$

bzw. $10\,N \approx 1\,kg$

1) Kreidekästchen in der Luft halten, Loslassen andeuten: welche Kraft wirkt auf das Kreidekästchen, wenn man es loslässt ? ⇒Gewichtskraft
Versuch unterschiedlich schwere Gegenstände (z.B. Kreide/Papier) in die Luft halten
2) Wenn die Erde auf beide Körper dieselbe Gewichtskraft ausübt, welcher Körper müsste schneller fallen ? ⇒der Leichte, weil seine kleine Masse durch dieselbe Kraft mehr beschleunigt wird (s.o.)
3) Welcher fällt schneller und warum ? ⇒ohne Luftwiderstand keiner
Vers.: Fallen von ähnlich großen Körpern verschiedenen Gewichts, z.B. Messer und Kreide

AM Röhre mit Vakuum

4) Vgl. F = ma: wenn verschiedene Massen gleich beschleunigt werden, übt dann die Erde eine konstante Kraft auf uns ? ⇒nein, aber Erdbeschleunigung ist konstant.

Newton 3: Reaktionsprinzip

(=Wechselwirkungsgesetz)
(3. Newton'sches Axiom)

Nicht nur der Vollständigkeit halber, sondern zur Vorbereitung des Problemes, in welche Richtung Kräfte wirken.

1) Kreidekästchen in der Luft fällt wegen der Erdbeschleunigung. Warum fällt das Kreidekästchen auf dem Tisch nicht ? Warum wird ein Auto bei konstant 100km/h nicht schneller, obwohl der Motor ständig Kraft aufbringt ?⇒Gegenkraft

Kräfte treten immer paarweise auf (Kraft und Gegenkraft)
Es muss also definiert werden, welcher der beiden Kräfte man betrachtet. Wir betrachten die Kräfte wie sie auf den betrachteten Körper wirken.

Vertiefung

Übungen zur Gewichtskraft aus dem Rechenbuch bzw. Üb-Aufgaben Böge

Weiterführung der Theorie der Kräfte ist nicht zweckmäßig, weil die Aufnahmekapazität der Schüler meist erreicht ist. Weil Gewichtskraftberechnungen relativ einfach sind, kann gleichzeitig auf andere Themen eingegangen werden (themenübergreifend).

Prinzip von d'Alembert

Die resultierende Kraft eines Systems wirkt entgegengesetzt zur dynamischen Kraft.
Damit können Aufgaben der Dynamik mit Verfahren der Statik gelöst werden.

Die Resultierende Kraft ist diejenige, die das System beschleunigt, die dynamische Kraft ist die Trägheitskraft des Systems.

Vertiefung

Aktionsprinzip „Kraft = Masse mal Beschleunigung“ →

$$[N] = [\frac{kg\,m}{s^2}] \rightarrow 1\frac{m}{s^2} = 1\frac{N}{kg}$$

→ 1 N beschleunigt 1kg mit 1m/s²
→ 9,81 N beschleunigt 1kg mit Erdbeschleunigung

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 495..514
MVK: [EuroRBM]

Statik_TA_Kraft-Beschleunigung.odt

Seitenumbruch

FTM: um TG-Hinweise gekürzt
MVK: entfällt
TG:ja

Statik

Definition, Zweck

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in Körpern, die in Ruhe oder konstanter geradliniger Bewegung sind. Ihre Ergebnisse sind Grundlage der Festigkeitsrechnung.

FO Steinmetz-Meisterprüfung, Nürnberg ca.1570

1) Welche Fachgebiet muss man heutzutage dazu beherrschen? Statik

Verfahren der Alten: Erfahrung und Ästhetik (=Theorie?) wurden in Regeln umgesetzt.

2) Warum lassen wir am TG die konstante geradlinige Bewegung nicht zur Vereinfachung weg?

Konstante geradlinige Bewegung kann man von Ruhe gar nicht unterscheiden – z.B. fliegen wir ziemlich schnell um die Sonne.

Vereinfachungen für das TG

- alle Körper sind starr
- Reibung wird meist vernachlässigt
- nur 2D-Probleme (in der Ebene)
- Krafteingriff wird auf Punkte reduziert

3) Was wird in der Statik betrachtet? Kräfte.

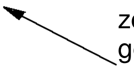
4) Welche Wirkungen haben Kräfte?

Bewegungs- (Thema der Kinetik, wie Statik ein Teilgebiet der Dynamik) oder Formänderungen (meist vernachlässigt): Ideal starre Körper erfahren keine Formänderung durch Kräfte (Vgl. Hysterese im Fahrradpedal, Tritt auf schlappen Fußball). Dieses theoretische Modell hilft, viele technische Probleme einfach und mit genügender Genauigkeit zu lösen, und erlaubt z.B. die Reduktion von Reibung oder Gravitation auf einen Punkt.
Ursache für Kräfte? F = m x a; F = E x A x ε, Reibung (meist vernachlässigt) usw.

Darstellungen von Kräften

Kräfte sind Vektoren und gekennzeichnet durch
- Betrag und
- Richtung (Wirklinie WL und Richtungssinn)

F=10N nur Betrag ohne Richtungsangabe



zeichnerisch, Betrag wird durch die Länge dargestellt, Richtung durch sich selbst.

$$\vec{F}=\begin{bmatrix}3\,N\\4\,N\end{bmatrix}=[53{,}1°;5\mathrm{N}]$$

5) Was muss man von einer Kraft wissen, wenn man mit ihr rechnen will? Auf den Tisch setzen (≈1kN), Tisch schieben, am Tisch ziehen.

Der Angriffspunkt der Kraft ist zwar auch wichtig, aber keine der Kraft innewohnende Eigenschaft. Wirklinie ist die Verlängerung des Kraftvektors in beiden Richtungen, Richtungssinn ist die Richtung des Kraftvektors auf der WL.
Bedeutung der Kraftrichtung: Man möge versuchen, ein Auto seitwärts anzuschieben.

Müsste genauer |F| = 10 N heißen! Einheit Newton [N] = kg m / s²

vektoriell, schließt die Richtung ein

Rechnen mit Kräften in der Statik

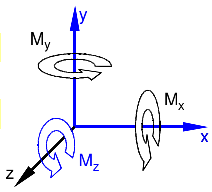
Aus $F=m\cdot a$ und a=0 (Statik!) folgt:

Allg. Gleichgewichtsbedingung

ΣF = 0

Die Hauptachsen im Raum

(Pfeilrichtung ist +)



1) Um wie viele Prozente wird die Rechnung von vereinfacht bei der Reduktion von 3D auf 2D?

FO Flieger

3D bedeutet 3 Kräfte und 3 Momente, 2 D nur 2 Kräfte und 1 Moment, d.h. die Vereinfachung beträgt 50%.
In der Ebene fallen F_z ,M_x und M_y weg: Danach ist die Indizierung von M nicht mehr nötig, weil keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.
Dreifingerregel: Koordinatensystem mit Daumen (x-Achse), Zeigefinger (y-Achse) und Mittelfinger (z-Achse) der rechten Hand aufspannen.
Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D

Aus $F=m\cdot a$ und a=0 (Statik!) folgt (2D bzw. ~~3D~~):

$\Sigma F_x = 0$	bzw.	$\Sigma F_x = 0$	$\cancel{\Sigma M_x = 0}$
$\Sigma F_y = 0$		$\Sigma F_y = 0$	$\cancel{\Sigma M_y = 0}$
$\Sigma M = 0$		$\cancel{\Sigma F_z = 0}$	$\Sigma M_z = 0$

Gelten für jedes Teil und jedes Koordinatensystem.

2) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen ?

Die zeichnerischen Lösungen beruhen auf denselben Gleichgewichtsbedingungen!

Im Einzelfall kann es sinnvoll sein, auch andere Kraftrichtungen oder Drehpunkte außerhalb des betrachteten Körpers zu wählen.

Lösbar im allg. Kräftesystem?

Für TG liegen alle Kräfte in einer Ebene:
→ es gelten 3 Gleichgewichtsbedingungen
$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$

Nur 3 unbekannte Größen (Kraftbeträge, Kraftrichtungen, Momente) können gelöst werden.
Wer mehr Unbekannte hat, sollte weitere Informationen suchen oder die Aufgabe überspringen

3) Wie viele Unbekannte können mit 6/3 Gleichungen gefunden werden ?

Mit 3 Gleichungen kann man 3 unbekannte Kräfte ermitteln (statische Bestimmtheit).
Als statisch bestimmtes ebenes System bezeichnet man einen Körper, der so gelagert ist, dass nur drei unbekannte Auflagerreaktionen angreifen.
Beispiel: Eine Lagerung mit Fest- und Loslager ist statisch bestimmt, eine Lagerung mit 2 Festlagern ist überbestimmt.
Statisch überbestimmte System (mehr Auflagerreaktionen möglich) erfordern weitere Gleichungen zur Lösung (z.B. Dehnung durch Kraft oder Wärme bei zwei Festlagern).
Weniger Auflagerreaktionen heißt einfach, dass das Teil lose ist.
Die statische Bestimmtheit muss in jeder Raumrichtung erfüllt sein.

Lösbar im zentrales Kräftesystem?

Im zentralen KS wirken alle Kräfte durch einen Punkt
→ ohne Hebelarme wirken keine (Dreh-)Momente
→ es gelten nur noch 2 Gleichungen
$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$

Im zentralen KS sind nur noch 2 Größen lösbar, z.B.
– eine Kraft nach 1 Betrag und 1 Richtung oder
– 2 Kräfte mit bekannter Richtung

Das Reaktionsprinzip und seine Folgen

Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio)

Um mit ihnen rechnen zu können, muss man die paarweisen Kräfte trennen → Freimachen

4) Tauziehen mit je 5kN (500kg): Zugkraft im Tau?

Die Zugkraft beträgt 5kN und nicht etwa das Doppelte, denn Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio). Die Kräftepaare addieren sich nicht, sondern heben sich auf, und erfüllen so die Gleichgewichtsbedingung trivial und nutzlos. Um die Gleichgewichtsbedingungen anwenden zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen und betrachtet dann alle Kräfte, die von außen auf eine beliebige Baugruppe wirken. Das Verfahren heißt Freimachen und wird unten behandelt.

Vertiefung: keine

Statik_TA_Einfuehrung.odt
Seitenumbruch

Statik I: Zentrales Kräftesystem

Zeichnerische Lösungen im zentralen Kräftesystem..

Statik I ⇒ Zentrales Kräftesystem ⇒ alle Kräfte wirken durch einen Punkt ⇒ keine Hebelarme ⇒ Es treten keine Momente auf ⇒ Gleichgewichtsbedingung ΣM = 0 entfällt ⇒ nur 2 unbekannte Größen sind lösbar.

Zielgruppe: alle

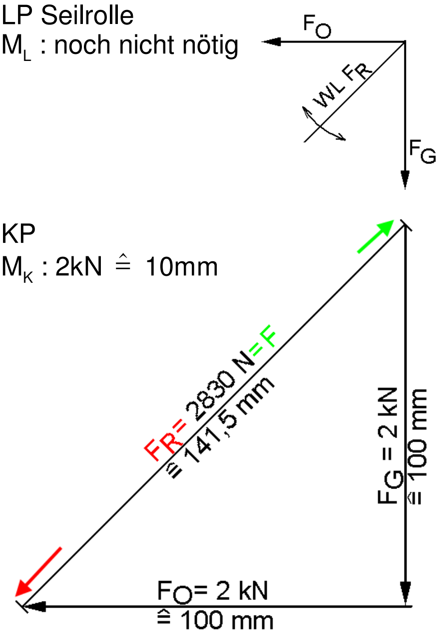
Angewendet werden die statischen Grundoperationen Parallelogramm, Erweiterungssatz, Verschiebesatz.
Die ausgeführten Beispiele stammen aus der ersten Quelle:
ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik_Ub_zentral.pdf; [EuroRBM] "Kräfte"

Zusammensetzen von Kräften

TG: Aufg. 1a, Oberleitungsrolle
MVK: [EuroRBM]
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 32ff
[Böge Aufg.] Aufgabe 29-31 sind ungenau gestellt.

LP Seilrolle
M_L : noch nicht nötig

KP
M_K : 2kN ≙ 10mm



Arbeitsplan

Arbeitsplan kann auch Algorithmus, Kochrezept, Arbeitsanweisung, Vorgehensweise heißen.

Ergebnis abschätzen

Welche Kräfte wirken überhaupt ?

0. Lageplanskizze
Geeignete Baugruppe auswählen und nennen!

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 der Punktzahl .

1. Lageplan
Alle auf die BG wirkenden Kräfte einzeichnen
– Wirklinien winkeltreu
– Richtungen: wie wirkt RdW auf BG
– Angriffspunkte lagetreu (Lagemaßstab).

Kräfte eintragen, wo sie wirken.

Der Lageplan ist die zeichnerisch-formale Fassung von "Gegeben und Gesucht".
Im allgemeinen Kräftesystem fließen über den Lagemaßstab der Abstand der Kräfte und damit die Momente ein. Beim zentralen System erübrigt sich das Eintragen der Angriffspunkte, da sie alle an einem Punkt angreifen.
Unbekannte WL können wie gezeigt oder für rechn. Lösungen mit x- und y-Komponenten dargestellt werden.
Richtung: Wie wirkt der Rest der Welt auf die Baugruppe.

2. Kräfteplan
Kräfte eintragen
– maßstabsgerecht (Kräftemaßstab)
– hintereinander als Pfeilkette
– winkeltreu (Parallelverschiebung)

Kräfte bilden einen geschlossenen Linienzug.

Der Kräfteplan ist das Lösungsverfahren und sollte streng vom LP unterschieden werden. Deshalb akzeptiere ich auch keine Parallelogramme, die bei 2 Kräften noch möglich wären.
Die Richtungen sollen per Parallelverschiebung übertragen werden, weil dies erfahrungsgemäß wesentlich weniger Fehler erzeugt.
Die gegebenen Kräfte werden in beliebiger Reihenfolge maßstabsgerecht und richtungsgemäß so aneinander gereiht, dass sich ein fortlaufender Kräftezug ergibt. Der Anfangspunkt kann beliebig gewählt werden.

3. Resultierende F_R / Gegenkraft F
F_R (Ersatzkraft) ist die 'Abkürzung im KP' und ersetzt die gegebenen Kräfte
F schließt das Krafteck und hält gegen die gegebenen Kräfte

Ob die Resultierende oder die Gegenkraft gefragt ist, hängt von der Aufgabe ab.Beide sind gleich groß, aber entgegengerichtet.
Die Resultierende ist die Kraft, die die gegebenen Kräfte ersetzen kann. Beispiel: Wenn auf ein Fahrzeug Antriebskräfte, Luftwiderstand und Rollreibung wirken, kann man diese zusammenfassen und mit der Resultierenden die Beschleunigung zu ermitteln.

Ausmessen, umrechnen mit M_K.

Plausibilitätsbetrachtung

Plausibilität: Kann das stimmen?
Vorher Ergebnis abschätzen und nachher Plausibilitätsbetrachtung gehören zu jeder Aufgabe.

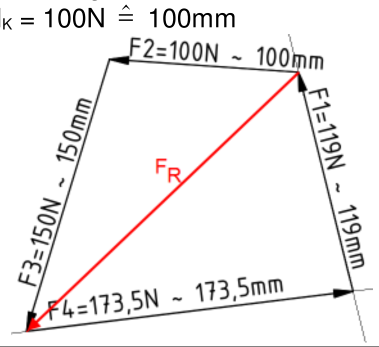
Vertiefung

FTM: [Böge Aufg.] Aufg.29ff

Zerlegen von Kräften

TG: Aufg. 4a: Eimerziehen2
MVK: [EuroRBM]
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 40f

LP siehe Aufgabe
KP M_K = 100N ≙ 100mm



Arbeitsplan

0-3 wie oben (bek. Kräfte addieren)

Ültg:Aufgabe 3
Grundsätzlich andere Aufgabe, da nicht eine Kraft gesucht wird, sondern zwei.

4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen
– WL einer Kraft parallel verschieben durch den Anfang von F_R und
– WL der anderen Kraft parallel verschieben durch den Endpunkt von F_R.
– Die unbekannten Kräfte werden durch den Schnittpunkt begrenzt.
– Richtung der Kräfte einheitlich (mit / gegen Uhrzeigersinn)

Zu diesem Verfahren müssen die Kraftrichtungen bekannt sein. Hinweise auf die Kraftrichtungen hat man bei Seilen, Ketten, Zweigelenkstäben, einwertigen Lagern usw.
Wenn die Kraftrichtungen nicht bekannt sind, müssen die Drehmomente eingerechnet werden, dies geschieht zeichnerisch im Schlusslinienverfahren.
Drei und mehr unbekannte Kräfte sind ohne Randbedingungen nicht lösbar.

F_R muss im Kräfteplan nicht eingetragen werden.

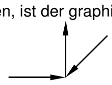
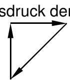
Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM], FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 49ff

Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen

Alle Kräfte, die sich im Lageplan in einem Punkt treffen, ergeben im Kräfteplan einen geschlossenen Linienzug.

Der geschlossene Linienzug, bei dem alle Kräfte mit oder alle Kräfte gegen den Uhrzeiger weisen, ist der graphische Ausdruck der Gleichgewichtsbedingungen.

LP:  KP: 

Rechnerische Lösungen im zentralen Kräftesystem

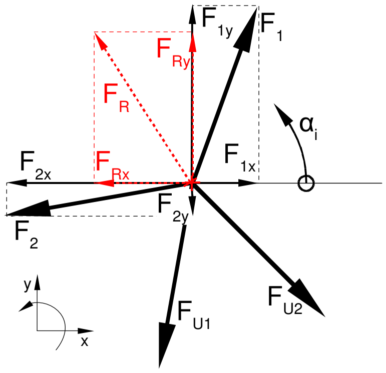
TG: Aufg. 4a, Mobile Antenne; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 51f

Systematische Lsg. - Zusammensetzen

(ohne KP)

TG: Aufg. 4a: Mobile Antenne.
Geg: F_1; F_2; Ges.: F_R; F_3; F_4

Lageskizze mobile Antenne



Arbeitsplan:

Dieser programmierfähige Algorithmus spart fehlerträchtige Überlegungen und übt alle nötigen Techniken ein:

TG: UB Statik zentral

1. Lageplanskizze

Das Freimachen ist unverzichtbar, um die Aufgabe auf die Kräfte zu reduzieren. Zur Dokumentation genügt eine Skizze.

2. Koordinatensystem festlegen
3. Tabelle der Kräfte erstellen

Alle Winkel α von der x-Achse aus!

	|F| [N]	α [°]	F_x [N]	F_y [N]
F_1	250	70	85,5	234,9
F_2	200	190	-197	-34,7
F_R	229,1	119,1	-111,5	200,2
F_{U1}	76,6	260	-13,3	-75,4
F_{U2}	176,5	-45	124,8	-124,8
	Kontrolle: Σ =		0	0

Wenn alle Winkel α von der selben (x-)Achse gemessen werden, ergeben sich später die Vorzeichen automatisch. Das mag im ersten Moment umständlich erscheinen, erspart aber später Nachdenken und daraus resultierende mögliche Fehler.

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 250\,N \cdot \cos 70° = 85{,}51\,N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 250\,N \cdot \sin 70° = 234{,}92\,N$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 200\,N \cdot \cos 190° = -196{,}96\,N$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 200\,N \cdot \sin 190° = -34{,}73\,N$$
$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} = 85{,}51\,N + (-196{,}96\,N) = -111{,}45\,N$$
$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} = +234{,}92\,N + (-34{,}73\,N) = 200{,}19\,N$$
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 229{,}1\,N = \sqrt{(-111{,}45\,N)^2 + (200{,}19\,N)^2}$$
$$\alpha'_R = \arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan\frac{200{,}19\,N}{-111{,}45\,N} = -60{,}9°$$

nach links oben

$$\alpha_R = \alpha'_R + 180° = -60{,}9° + 180° = 119{,}1$$

zur +x-Achse

4. Kräfte in Komponenten zerlegen

Komponenten=Koordinatenrichtungen

$F_{nx} = F_n \cos\alpha_n$; $F_{ny} = F_n \sin\alpha_n$

Für die Zerlegung in Komponenten muss man genau einmal überlegen, ob man sin oder cos einsetzen muss, danach läuft alles automatisch. Alle x-Komponenten erhalten das eine, alle y-Komponenten das andere. Die Vorzeichen der Komponenten ergeben sich wegen des einheitlichen Bezuges der Winkel auf die x-Achse automatisch.

5. Komponenten addieren

ergibt die Komponenten der Resultierenden F_R: $F_{Rx} = \Sigma F_{nx}$, $F_{Ry} = \Sigma F_{ny}$

F_n meint den Betrag der n-ten Kraft. α ist der Winkel von der x-Achse gegen den Uhrzeiger bis zur Kraft. Vorzeichen von $F_{nx/y}$ ergeben sich automatisch.

6. Betrag $|F_R|$ der Resultierenden

$$|F_R| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

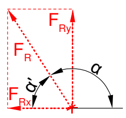
Betrag mit Pythagoras aus den Komponenten berechnen.

7. Richtung α_R der Resultierenden

arctan liefert zweideutigen Werte → Winkel muss präzisiert werden:

$$\alpha_R = \arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

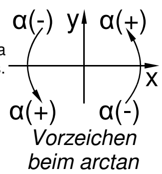
– Vorzeichen der Komponenten → Skizze



oder

– α ab +x-Achse angeben
Für $F_{Rx} \geq 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R$
Für $F_{Rx} < 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R + 180°$

Die genaue Richtung α_R bekommt man mit den Komponenten F_{Rx} und F_{Ry} heraus, da rentiert sich kein Algorithmus. Statt Regeln auswendig zu lernen, sollte man das Problem erkennen und nach Plausibilität lösen.



Systematische Lösung - Zerlegen

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Rx} + F_{U1x} + F_{U2x} = F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos\alpha_{U1} + F_{U2} \cdot \cos\alpha_{U2}$$
$$\rightarrow \quad F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos\alpha_{U1}}{-\cos\alpha_{U2}}$$
$$\Sigma F_y = 0 = F_{Ry} + F_{U1y} + F_{IIy} = \ldots$$
$$\rightarrow \quad F_{U2} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin\alpha_{U1}}{-\sin\alpha_{II}}$$
$$F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos\alpha_{U1}}{-\cos\alpha_{U2}} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin\alpha_{U1}}{-\sin\alpha_{U2}} \quad \rightarrow$$
$$F_{Rx} \cdot \sin\alpha_{U2} + F_{U1} \cdot \cos\alpha_{U1} \cdot \sin\alpha_{U2} = F_{Ry} \cdot \cos\alpha_{U2} + F_{U1} \cdot \sin\alpha_{U1} \cdot \cos\alpha_{U2}$$
$$F_{U1} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin\alpha_{U2} + F_{Ry} \cdot \cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1} \cdot \sin\alpha_{U2} - \sin\alpha_{U1} \cdot \cos\alpha_{U2}} = \frac{-(-111{,}5\,N) \cdot \sin(-45°) + 200{,}2\,N \cdot \cos(-45°)}{\cos 260° \cdot \sin(-45°) - \sin 260° \cdot \cos(-45°)} = 76{,}6\,N$$
$$F_{U2} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin\alpha_{U1} + F_{Ry} \cdot \cos\alpha_{U1}}{\cos\alpha_{U2} \cdot \sin\alpha_{U1} - \sin\alpha_{U2} \cdot \cos\alpha_{U1}} = \frac{-(-111{,}5\,N) \cdot \sin 260° + 200{,}2\,N \cdot \cos 260°}{\cos(-45°) \cdot \sin 260° - \sin(-45°) \cdot \cos 260°} = 176{,}5\,N$$

8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$

und die unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2} per Gleichungssystem lösen

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Rx} + F_{U1x} + F_{U2x}$$
$$\Sigma F_y = 0 = F_{Ry} + F_{U1y} + F_{UIIy}$$
$$\rightarrow$$
$$F_{U1} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin\alpha_{U2} + F_{Ry} \cdot \cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1} \cdot \sin\alpha_{U2} - \sin\alpha_{U1} \cdot \cos\alpha_{U2}}$$
$$F_{U2} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin\alpha_{U1} + F_{Ry} \cdot \cos\alpha_{U1}}{\cos\alpha_{U2} \cdot \sin\alpha_{U1} - \sin\alpha_{U2} \cdot \cos\alpha_{U1}}$$

1) Herleitung nur einmalig
2) Man beachte die Symmetrie der Gleichungen, die mehrfach nützlich sein kann:
- Kontrollmöglichkeit
- Analogieschlüsse
- Ästhetik / Spass an Mathe vermitteln

Varianten:

$$F_{U1} = \frac{-F_R \cdot \cos\alpha_R \cdot \sin\alpha_{U2} + F_R \cdot \sin\alpha_R \cdot \cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1} \cdot \sin\alpha_{U2} - \sin\alpha_{U1} \cdot \cos\alpha_{U2}}$$
$$F_{U1} = \frac{-\Sigma F_{ix} \cdot \sin\alpha_{U2} + \Sigma F_{iy} \cdot \cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1} \cdot \sin\alpha_{U2} - \sin\alpha_{U1} \cdot \cos\alpha_{U2}}$$

3) F_{UII} analog herleiten oder Symmetrie nutzen

Seitenumbruch

Individuelle Lösung anhand des KP

= Durchwursteln; für einfache Aufgaben geeignet

Dieses Lösungsverfahren kann man auch "Durchwursteln" nennen.
Für einfache Aufgaben braucht man keinen komplizierten Algorithmus. Oft genügt es, sich den Kräfteplan zu skizzieren und dann die gesuchten Kräfte mit ein paar Winkelfunktionen auszurechnen. Für individuelle Lösungen muss der Arbeitsplan sehr allgemein gehalten sein

Prinzip

1. Lageplanskizze
2. Kräfteplanskizze
3. Kräfte mithilfe KP und Winkelfunktionen berechnen

Zerlegen in rechtwinkligen Dreiecken

Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Komponenten.

$F_{Rx} = F_R \bullet \cos \alpha_R$;

$F_{Ry} = F_R \bullet \sin \alpha_R$

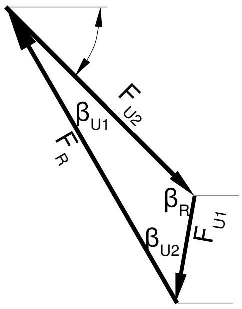
$$F_{Rx} = F_R \cdot \cos \alpha_R$$

$$F_{Ry} = F_R \cdot \sin \alpha_R$$

Das Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Kräfte ist häufig notwendig und sollte von jedem Schüler beherrscht werden..

Zerlegen im allgemeinen Fall

Kräfteplanskizze mit der bekannten Kraft F_R und den Wirklinien der unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2}



Sinussatz

$$\frac{F_R}{\sin \beta_R} = \frac{F_{U1}}{\sin \beta_{U1}} = \frac{F_{U2}}{\sin \beta_{U2}}$$

Skizze mit Werten der Beispielaufgabe

Winkel für das Beispiel:

$$\beta_{U1} = 180° - \alpha_R + \alpha_{U2} = 180° - 119{,}1° - 45° = 15{,}9°$$

$$\beta_{U2} = \alpha_R - (\alpha_{U2} - 180°) = 119{,}1° - (260° - 180°) = 39{,}1°$$

$$\beta_R = (\alpha_{U1} - 180°) - \alpha_{U2} = (260° - 180°) - (-45°) = 125°$$

$$\text{Kontrolle}: 15{,}9° + 39{,}1° + 125° = 180°$$

Auch die Berechnung der Innenwinkel könnte man automatisieren, aber dieser Aufwand lohnt sich nicht ggü. einer individuellen Lösung. Im Fall der Fälle müssen die Kräfteplanskizze und ein paar Überlegungen genügen.

Beispiel:

$$F_{U1} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U1}}{\sin \beta_R} = 229{,}1\,N \cdot \frac{\sin 15{,}9°}{\sin 125°} = 76{,}6\,N$$

$$F_{U2} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U21}}{\sin \beta_R} = 229{,}1\,N \cdot \frac{\sin 39{,}1°}{\sin 125°} = 176{,}4\,N$$

Vertiefung

Aufg. wie in Böge übernehmen

TG: UB Statik zentral
MVK: [EuroRBM]
FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 52ff

Seitenumbruch

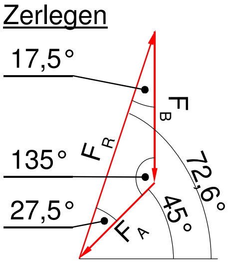
[Böge Aufg.] Aufg. 51

Zusammensetzen

	∣F∣	α	F_x	F_y
F_1	320N	35°	262,1N	183,5N
F_2	180N	55°	103,2N	147,4N
F_3	250N	160°	-234,9N	85,5N
F_R	436,3N	72,6°	130,4N	416,4N
F_A	184,5N	225°	-130,4N	-130,4N
F_B	286,0N	270°	0	-286,0N

$$F_{1x}=F_1\cdot\cos\alpha_1=320\text{N}\cdot\cos 35°=262{,}1\text{N}$$
$$F_{1y}=F_1\cdot\sin\alpha_1=320\text{N}\cdot\sin 35°=183{,}5\text{N}$$
$$F_{2x}=F_2\cdot\cos\alpha_2=180\text{N}\cdot\cos 55°=103{,}2\text{N}$$
$$F_{2y}=F_2\cdot\sin\alpha_2=180\text{N}\cdot\sin 55°=147{,}4\text{N}$$
$$F_{3x}=F_3\cdot\cos\alpha_3=250\text{N}\cdot\cos 160°=-234{,}9\text{N}$$
$$F_{3y}=F_3\cdot\sin\alpha_3=250\text{N}\cdot\sin 160°=85{,}5\text{N}$$
$$F_{Rx}=+F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=262{,}1\text{N}+103{,}2\text{N}-234{,}9\text{N}$$
$$=130{,}4\text{N}$$
$$F_{Ry}=+F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=183{,}5\text{N}+147{,}4\text{N}+85{,}5\text{N}$$
$$=416{,}4\text{N}$$
$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=436{,}3\text{N}$$
$$=\sqrt{(130{,}4\text{N})^2+(416{,}4\text{N})^2}$$
$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}=\arctan\frac{416{,}4\text{N}}{130{,}4\text{N}}=72{,}6°$$
zur positiven x–Achse (nach rechts oben)

Zerlegen



$$F_A=F_R\cdot\frac{\sin\alpha_A}{\sin\alpha_R}=436{,}6\text{N}\cdot\frac{\sin 17{,}4°}{\sin 135°}=185\text{N}$$
$$F_B=F_R\cdot\frac{\sin\alpha_B}{\sin\alpha_R}=436{,}6\text{N}\cdot\frac{\sin 27{,}6°}{\sin 135°}=286\text{N}$$

Statik_TA_zentral-rechnerisch.odt
Seitenumbruch

Freimachen von Körpern

= Bauteile durch Kräfte ersetzen

Zweck

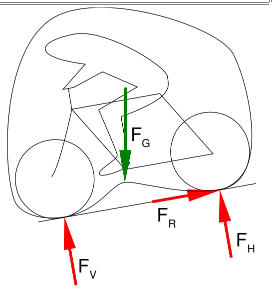
– Erkennen aller Kräfte an einer BG
– Voraussetzung für alle Lösungen in der Statik

FTM, TG: Erarbeiten anhand der Übungen; MVK: entfällt

In der Statik ist das "Freimachen" der geistig anspruchsvollste Schritt (den das Fach Technik M am TG zu bieten hat), es ist der häufigste Grund für Scheitern. Im zentralen Kräftesystem sind die Aufgaben meist so einfach gestrickt, dass das Freimachen intuitiv möglich ist. In den Übungen zum zentralen KS wird die zentrale Bedeutung des Freimachens also nicht klar, deshalb führe ich diese Einheit erst danach durch und vertiefe es in den Übungen zum allgemeinen KS.
Nur mit den Freimachen ist gewährleistet, dass alle an der BG angreifenden Kräfte richtig erfasst werden.

Beispiel

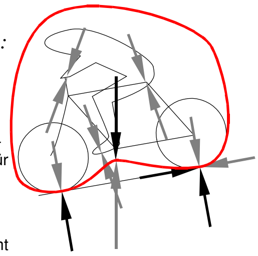
Lageskizze Rad + FahrerIn
Ges.: Aufstandskräfte



1) Im System Rad+FahrerIn findet man zahlreiche Kräfte und Gegenkräfte (Kräftepaare):
Rad drückt gegen Straße und zurück, vorne wie hinten, Reibung vs. Antriebskraft, Hände vs. Lenker, Gesäß vs. Sattel, Erde zieht an Rad+Fahrer und umgekehrt, u.v.a.m.

2) Was kann man damit anfangen?
Nix! Die Anzahl/Unzahl der Kräfte ist unhandlich und Kräftepaare, die sich per se aufheben, bieten keinen Ansatz für die Gleichgewichtsbedingungen.

3) Gesucht ist ein Verfahren, um die Kräftepaare zu reduzieren und aufzusprengen



→ Freimachen: Man entscheidet sich für eine BG und zieht einen symbolischen Kringel darum. Reduktion: Alle Kräftepaare, die innerhalb oder außerhalb des Kringels liegen, werden ignoriert. Fraktion: Von den Kräftepaaren, die an der Grenze der BG liegen bzw. von der Systemgrenze zerschnitten werden, betrachtet man nur die Kräfte, die von außen auf die BG wirken.

Vorgehensweise

1. Baugruppe BG wählen
– Geeignete BG grenzen an gesuchte Kräfte

(Böge, Techn. Mechanik) einarbeiten,

Im Prinzip muss man nur die gesuchten Kräfte eintragen und hat schon einen Teil der Grenze der geeigneten Baugruppe. Auf die BG dürfen beliebig viele bekannte Kräfte wirken. Sonstige Kräfte sind im Einzelfall nötig, sie zählen aber zu den unbekannten Kräften.
Gewichts- und Reibungskräfte werden berücksichtigt, wenn es verlangt wird.

2. Alle Kräfte eintragen
– An jedem Kontakt zw. der BG und dem Rest der Welt
– ⊥ rechtwinklig zur Berührfläche (Normalkraft) bzw.
  ∥ parallel zur Berührfläche (Reibung)
– Gravitation (Gewichtskräfte)

Vom freizumachenden Körper werden alle Berührstellen entfernt und durch die zugehörigen Kräfte ersetzt. Am Besten denkt man sich eine Linie um die gewählte Baugruppe und sucht alle Kräfte, die diese Linie überschreiten.
Schüler setzen Kräfte oft nach Wunschdenken ein, z.B. "da brauche ich noch eine Kraft" oder auf Verdacht "Da bewegt sich was". Das führt zu vielen Fehlern.

3. Bekannte Kräfte mit Richtung
– Richtung: Wie wirkt der RdW auf die BG?

Mit der Vorzeichenregel „Wie wirkt der Rest der Welt (RdW) auf die Baugruppe (BG)“ wirken Schwerkräfte nach unten. Es käme auch zu richtigen Ergebnissen, trüge man ALLE Richtungen „falsch“ herum ein (Schwerkraft nach oben!), aber Mischen der Richtungssysteme funktioniert nie.

4. Unbekannte Kräfte
– Einwertiges Lager: Richtung annehmen
  Zweiwertiges L.: 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x, F_y)

Bei zeichnerischen Lösungen muss man keine Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen, es genügen die WL. Bei rechnerischen Lösungen sind die Richtungen nötig für die Vorzeichen in den Gleichungen. Wenn man eine Richtung „falsch“ angenommen hat, wird das Ergebnis negativ und es stimmt wieder.

5. Lösbarkeit prüfen
– Lösbar sind max. als 3 unbekannte Größen (Beträge und/ oder Richtungen von Kräfte).

Wer zu viele Unbekannte hat, muss Infos suchen:

Es sind nur 3 unbekannte Kräfte lösbar, weil nur drei Gleichgewichtsbedingungen existieren. Die Anzahl der lösbaren Unbekannten reduzieren sich, wenn nicht alle Gleichungen angewendet werden können, z.B. beim zentralen Kräftesystem (kein Momentengleichgewicht) oder wenn alle Kräfte parallel sind (Kräftegleichgewicht nur in einer Richtung).
Wenn man mehr unbekannte Kräfte findet als lösbar sind, muss man weitere Informationen suchen. Ein Lösungsversuch ohne zusätzliche Infos ist sinnlos.

L. Lageplanskizze anfertiegen
– LS dokumentiert die Überlegungen

Das Freimachen ist oft der schwierigste Teil einer Statikaufgabe, deshalb gebe ich für eine lesbare LS bereits 1/4 bis 1/3 der Punkte. Umgekehrt gibt es ohne LS nie die volle Punktzahl. Lösungen in der Statik sind komplex und die Fehlerquote steigt stark an, wenn man wesentliche Lösungsschritte im Kopf jongliernen → LS liegt im Eigeninteresse des Schülers.

Hinweise auf Richtungen von Kräften

Kein TA, nur beiläufig einließen lassen

Seile, Ketten usw.

übertragen nur Zugkräfte in Seilrichtung

Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)

= an 2 Stellen drehbar gelagert
übertragen Zug- oder Druckkräfte nur in der Verbindungslinie der Gelenkpunkte.
z.B. Kolben, Gitterstäbe

Gemeinsame Wirkungslinie ist notwendig in der Definition, damit auch gebogenen Teile als Pendelstützen gesehen werden können. Die Form der Pendelstütze spielt keine Rolle.

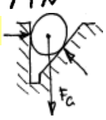
Berührflächen

übertragen Normalkräfte senkrecht und Reibkräfte parallel zur Berührfläche.

Wenn die Reibung berücksichtigt werden muss, ist sie gegen die Bewegungsrichtung einzutragen. Die Haftreibung $F_R = \mu \times F_N$ ist nicht die tatsächliche Reibkraft, sondern ihr höchstmöglicher Wert. Deshalb ist die Reibkraft in aller Regel unbekannt.
Meist wird die Reibung vernachlässigt.
Für die Rollreibung im Ruhezustand gilt dasselbe wie für die Haftreibung oben.

Rollkörper

Normalkräfte bei Rollkörper (Kugeln, Rollen) gehen durch ihren Mittelpunkt.



Verschiebesatz: Wenn über eine Rolle ein Seil gelegt ist, das in beide Richtungen gleich stark zieht, spielt ihr Durchmesser „keine Rolle“.

Seitenumbruch

Lose und feste Lager

sind in allen Richtungen (F_x, F_y, $\cancel{F_z}$, $\cancel{M_x}$, $\cancel{M_y}$, M_z) außer einer, zwei, drei beweglichen Möglichkeiten

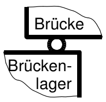
Richtung einer Drehung wird mit der Richtung der Drehachse angegeben. Da wir nur 2-D-Systeme betrachten, entfallen F_z, M_x und M_y, und Index z beim Moment.
Wenn die Reibung ausnahmsweise berücksichtigt wird, zählt diese als Stützkraft.

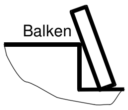
Einwertige Lager

sind in allen Richtungen außer einer beweglich.

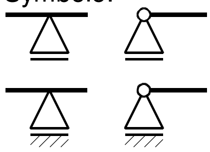
Ihre Wirklinie ist eindeutig bestimmt. (einwertige Stützkräfte bzw. Pendelstützen, Seil, usw.) sind beim Lösen von Aufgaben besonders wichtig.

konstruktive Beispiele



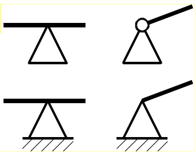


Symbole:



Zweiwertige Lager

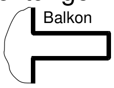
sind in allen Richtungen außer zweien beweglich.

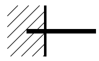


FO Brückenlager

Dreiwertige Lager

sind in allen Richtungen fest.





Vertiefung

FTM, TG: AB Statik_Ub_Abi ([Böge Aufg.] Aufgabe 9..28 sind zu leicht)

Statik_TA_Freimachen.odt

Seitenumbruch

Statik II: Allgemeines Kräftesystem

Resultierende rechnerisch im allgemeinen System

Zeichnerischeres Pendant: Seileckverfahren.

FTM: ja
TG: nein

Bei der Ermittlung einer Resultierenden geht man zunächst vor wie beim zentralen Kräftesystem und führt erst am Schluss die neue Gleichgewichtsbedingung Σ M = 0 ein. Deshalb bietet es sich an, mit diesem Verfahren vom zentralen zum allgemeinen Kräftesystem überzuleiten. Gegenüber der Berechnung von Auflagerkräften kommen die gleichen Rechentechniken zur Anwendung, nur eine andere Reihenfolge ist zweckmäßig. Da ich die UE Auflagerkräfte zuerst entwickelt habe, finden sich dort mehr allgemeine Hinweise.

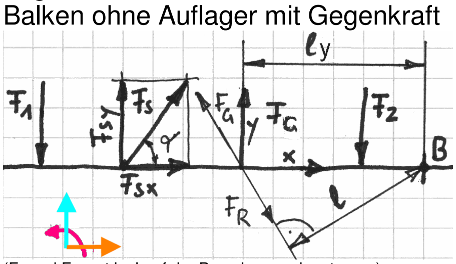
Anwendung

- Ermittlung einer resultierenden Kraft mit Betrag, Richtung und Lage

Beispiel FTM: [Böge Aufg.] 79

Lageskizze

Balken ohne Auflager mit Gegenkraft



(F_G und F_R erst im Lauf der Berechnung eingetragen)

$$F_{Sx} = F_S \cdot \cos\alpha = 25\,kN \cdot \cos 60° = 12{,}5\,kN$$
$$F_{Sy} = F_S \cdot \sin\alpha = 25\,kN \cdot \sin 60° = 21{,}65\,kN$$

Arbeitsplan

1. Lageskizze erstellen
– nur gefragte Kräfte
– Gegenkraft F_G eintragen

Das Freimachen ist wie immer unverzichtbar, es genügt eine unmaßstäbliche Skizze.
Es werden nur die Kräfte eingetragen, für die die resultierende Kraft F_R ermittelt werden soll. Statt F_R sollte man aber deren Gegenkraft F_G ermitteln, weil man diese mit den normalen Gleichgewichtsbedingungen berechnen kann ohne Verrenkungen mit dem Vorzeichen.
Die Resultierende F_R wirkt dann entgegen der Gegenkraft F_G.

2. Unbekannte Kraftrichtungen annehmen
– für das Vorzeichen in Rechnungen

3. Koordinatensystem wählen
– entlang der Bemaßung
– markieren

4. Kräfte in Koordinatenrichtung zerlegen
– wenn sie nicht schon dort liegen

5. Kräftegleichgewichte Σ F_x = 0 und Σ F_y = 0

Sorgfältig auf die Vorzeichen eingehen. Für jede Gleichgewichtsbedingung gilt eine (eigene) Richtung im Koordinatensystem.
Weist die Kraft in Richtung der Koordinatenachse (z.B. x nach rechts oder y nach oben im üblichen Koordinatensystem), so ist sie positiv, sonst negativ.

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

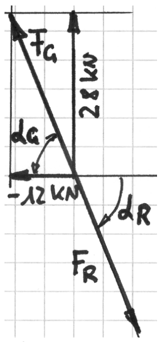
$$\Sigma F_x = 0$$
$$= +F_{Sx} + F_{Gx} \quad \rightarrow$$
$$F_{Gx} = -F_{Sx} = -12{,}5\,kN$$

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_y = 0$$
$$= -F_1 + F_{Sy} + F_{Gy} - F_2 \quad \rightarrow$$
$$F_{Gy} = F_1 - F_{Sy} + F_2$$
$$= 30\,kN - 21{,}65\,kN + 20\text{kN} = 28{,}3\,kN$$

6. Betrag und Richtung von F_G und F_R
– für F_G gelten Gleichgewichtsbedingungen
– F_R und F_G verlaufen entgegensetzt
– arctan ist nicht eindeutig → tatsächliche Richtung feststellen und mit Skizze angeben

$$F_G = \sqrt{F_{Gx}^2 + F_{Gy}^2}$$
$$= \sqrt{(-12{,}5\,kN)^2 + (28{,}3\,kN)^2}$$
$$= 31{,}0\,kN$$
$$\alpha_G = \arctan\frac{F_{Gy}}{F_{Gx}}$$
$$= \arctan\frac{28{,}3\,kN}{-12{,}5\,kN}$$
$$= -66{,}2°$$
$$|F_R| = |F_G| = 31{,}0\,kN$$
$$\alpha_R = \alpha_G = -66{,}2°$$



(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft ⊥ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

7. Lage von F_G / F_R

7a. Drehpunkt wählen
– Im Bezugspunkt der Lage

7b. Momentengleichgewicht Σ M = 0
– im Drehpunkt ansetzen
– Hebelarm und Kraftkomponente je nach Fragestellung
– Ergibt eine Gleichung mit einer Unbekannten = sofort lösbar.

Die Lage von FR bzw. der Abstand kommt mit dem Momentengleichgewicht ins Spiel.

Vorzeichenregel: Dreht die Kraft den Körper gegen den Uhrzeigersinn um den Drehpunkt, so ist sie positiv, sonst negativ.

$$\Sigma M_B = 0$$
$$= F_2 \cdot l_3 - F_{Sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_G \cdot l \quad \rightarrow$$
$$l = \frac{F_2 \cdot l_3 - F_{Sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{F_G}$$
$$= \frac{20\text{kN} \cdot 0{,}7\,m - 21{,}65\,kN \cdot (1{,}5 + 0{,}7)\,m + 30\text{kN} \cdot (2 + 1{,}5 + 0{,}7)\,m}{31{,}0\,kN}$$
$$= 2{,}98\,m$$

Alternativ l_y:

$$\Sigma M_B = 0$$
$$= F_2 \cdot l_3 - F_{Sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_{Gy} \cdot l_y \; -$$
$$l_y = \frac{F_2 \cdot l_3 - F_{Sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{F_{Gy}}$$
$$= \frac{20\text{kN} \cdot 0{,}7\,m - 21{,}65\,kN \cdot (1{,}5 + 0{,}7)\,m + 30\text{kN} \cdot (2 + 1{,}5 + 0{,}7)\,m}{28{,}3\,kN}$$
$$= 3{,}26\,m$$

8. Plausibilität prüfen

Vertiefung

Böge 72-82

Auflagerkräfte berechnen im allgemeinen System

Zeichnerisches Pendant: Schlusslinienverfahren.

Anwendung

- Auflagerkräfte
- besonders
  - "Ab welchem .. kippt.."
- Bei komplizierter Bemaßung besser zeichnerisch lösen (Schlusslinienverfahren)

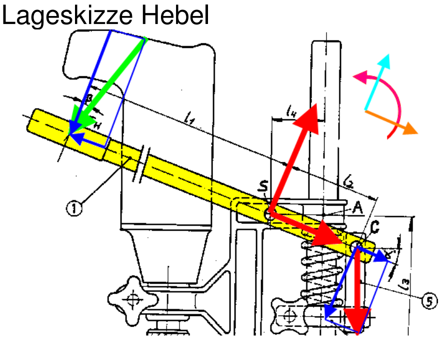
(HP 98/99-2 Zugmaschine mit Anhänger)

TGT: ja; TGTM: ja; FTM: ??

Statikaufgaben der Ebene löst man, indem man die 3 Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$ und $\Sigma M = 0$ für ein beliebiges Koordinatensystem aufstellt und mit dem entstehenden Gleichungssystem max. 3 unbekannte Größen löst.
Schon das Aufstellen der Gleichungen wird durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystemes erleichtert.
Wenn man das Gleichungssystem händisch lösen will/muss, sollte man weitere Möglichkeiten zur Vereinfachung nutzen, z.B. einen geschickten Drehpunkt für das Momentengleichgewicht.
Warum Algorithmen ? Die Stärke des Menschen ist es eigentlich, sich auf **neue** Probleme einzustellen, während wiederkehrende Spezialaufgaben wie Fliegen fangen besser von Frösche beherrscht werden [Ganten 2003]. Das sollte auch Schule fördern, also Vielseitigkeit verlangen und statt stumpfsinniger Tätigkeiten. Dem gegenüber steht, dass Ingenieure meist Standardprobleme mit Standardmethoden bearbeiten. Und Schüler können in einer 4,5-stündigen Abi-Prüfung nicht dauernd hochkonzentriert arbeiten und brauchen Lösungsmethoden, die eine reduzierte Hirnleistung vertragen: Also doch Algorithmen.
. Umstellen auf Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung und Lösen per CAS-Rechner?

TG: HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer

Lageskizze Hebel



$F_{Hx} = F_H \cdot \cos\beta = 100\text{N} \cdot \cos 10° = 98{,}48\,N$

$F_{Hy} = F_H \cdot \sin\beta = 100\text{N} \cdot \sin 10° = 17{,}36\,N$

4) Sorgfältig auf die Vorzeichen eingehen. Jede der 3 GG-Bedingungen gehört zu einer der 3 Koordinatenrichtungen.

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft ⊥ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$\Sigma M_S = 0$

$= 0 = F_{Hy} \cdot l_1 - F_{Cy} \cdot l_2 \quad \rightarrow$

$F_C = F_{Hy} \cdot \dfrac{l_1}{l_2 \cdot \cos\alpha} = 98{,}48\,N \cdot \dfrac{300\,mm}{90\,mm \cdot \cos 20°}$

$F_C = 349{,}3\,N$

5) Verstärkt auf Hebelarme eingehen

$\Sigma F_x = 0$

$= 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \quad \rightarrow$

$F_{Sx} = F_{Hx} - F_C \cdot \sin\alpha$

$F_{Sx} = 98{,}48\,N - 349{,}3\,N \cdot \sin 20° = -102{,}1\,N$

$\Sigma F_y = 0$

$= 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \quad \rightarrow$

$F_{Sy} = F_{Hy} + F_C \cdot \cos\alpha$

$= 17{,}36 + 349{,}3\,N \cdot \cos 20°$

$F_{Sy} = 426{,}7\,N$

Arbeitsplan

Für alle Probleme der Statik ist Freimachen unverzichtbar. Zu seiner Dokumentation genügt eine unmaßstäbliche Skizze.

1. Lageskizze erstellen

2. Koordinatensystem wählen
- entlang der Bemaßung
- markieren

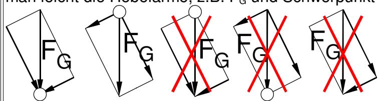
Im Momentengleichgewicht ist es meist einfacher, Kräfte in Koordinatenrichtung zu zerlegen und mit gegebenen Längen zu multiplizieren, als individuelle Hebelarme zu ermitteln – Ausnahmen bestätigen die Regel.
Beim Aufstellen der 3 Gleichgewichtsbedingungen orientiert man sich an der Markierung und vermeidet Vorzeichenfehler.

3. Richtungen für WL annehmen
- für das Vorzeichen in Rechnungen
- „falsche“ Annahme → negatives Ergebnis → stimmt wieder!

Man muss die Richtungen nicht kennen, sondern nur annehmen und kennzeichnen. Wenn die Richtung "falsch" angenommen wurde, wird das Ergebnis der Rechnung negativ und stimmt wieder. Es ist auch nicht sinnvoll, die "falsche" Richtungen nachträglich zu korrigieren, weil man dabei die ganze Rechnung korrigieren müsste. Wer sicher gehen will, vermerkt am negativen Ergebnis: „Kraft wirkt entgegen der Annahme.“
In zweiwertigen Lagern trägt man für unbekannte Kräfte die Komponenten in x- und y-Richtung ein.

4. Kräfte in Koordinatenrichtung zerlegen
- wenn sie nicht schon dort liegen
- im tatsächlichen Angriffspunkt →

Alternativ müsste man individuelle Hebelarme ermitteln und das muss nicht, kann aber kompliziert werden und fordert das Hirn – unnötig!
Bei Zerlegung außerhalb des Angriffspunktes verwechselt man leicht die Hebelarme, z.B. F_G und Schwerpunkt SP.



5a. Drehpunkt wählen
- für händische Lsg: im Schnittpunkt zweier WL unbekannter Kräfte
  → eine Gleichung mit 1 Unbekannten = sofort lösbar.
- CAS: beliebig

5b. Momentengleichgewicht Σ M = 0
- im Drehpunkt ansetzen

Kräfte, deren WL durch den Drehpunkt verlaufen, haben den den Hebelarm 0 und fallen aus der Gleichung $\Sigma M = 0$. Das Momentengleichgewicht mit dem Drehpunkt im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte reduziert sich also auf eine Gleichung mit einer Unbekannten und ist so leicht zu lösen.
Wenn die Schnittpunkte sind nicht bemaßt ([Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.), muss man entscheiden, ob man die Maße zum Schnittpunkt ermittelt oder das Gleichungssystem löst.
Im Beispiel kann der Drehpunkt in jedem der Bolzen S oder C liegen. Hier wird S gewählt, da von dort die Bemaßung ausgeht und dies die Rechnung ein wenig erleichtert.

6. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$
- beliebige Reihenfolge

$\Sigma F_x = 0$: In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme. Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.
$\Sigma F_y = 0$: Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

Man könnte noch einmal $\Sigma M = 0$ mit einem anderem Drehpunkt ansetzen, aber $\Sigma F = 0$ ist weniger aufwändig.

Vorzeichenregel: Es bekommen die Kräfte ein negatives Vorzeichen, deren angenommen Richtung entgegen den Koordinatenrichtungen x bzw. y wirken. Achtung: Diese Vorzeichen sind nicht die Vorzeichen des Momentengleichgewichts.

7. ggf. zusätzliche Gleichungen
- Für jede Unbekannte eine Glchg.
  - im Abi selten, z.B. HP1983/84-2 Hebestation

8. Gleichungssystem lösen
- per Hand oder CAS

Wenn es ein zweiwertiges Lager gibt:

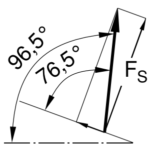
$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102{,}1\,N)^2 + (435{,}9\,N)^2}$

$F_S = 438{,}7\,N$

$\gamma_S = \arctan \dfrac{F_{Sy}}{F_{Sx}}$

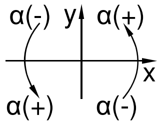
$= \arctan \dfrac{426{,}7\,N}{-102{,}1\,N}$

$= -76{,}5°$



9. Betrag und Richtung ermitteln

Achtung: arctan ergibt kein eindeutiges Ergebnis für α (Zählrichtung von α siehe rechts), deshalb muss man den Winkel mit einer Skizze deutlich machen.



Dazu skizziert man die Komponenten F_{Sx} (≈ -100N) und F_{Sy} (≈ +400N) in das gewählte Koordinatensystemund überlegt dann, wo der berechnete Winkel liegt.

10. Plausibilität prüfen

Plausibilität: Ist es plausibel, dass in F_C und F_S ca. 4x größer als F_H sind?

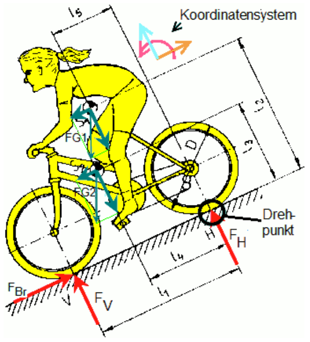
Vertiefung

Kompliziertere Aufgaben:
HP1983/84-2 Hebestation
[Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.)

Seitenumbruch

Beispiel: schiefe Ebene
z.B.HP 92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad+Fahrerin



$F_{G1x} = F_{G1} \cdot \sin\alpha = 560\,N \cdot \sin 15{,}6° = 151{,}0\,N$

$F_{G1y} = F_{G1} \cdot \cos\alpha = 560\,N \cdot \cos 15{,}6° = 539{,}3\,N$

$F_{G2x} = F_{G2} \cdot \sin\alpha = 140\,N \cdot \sin 15{,}6° = 37{,}7\,N$

$F_{G2y} = F_{G2} \cdot \cos\alpha = 140\,N \cdot \cos 15{,}6° = 134{,}8\,N$

$mit \quad \alpha = \arctan 28\,\% = 15{,}6°$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft ⊥ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$\Sigma M_H = 0$

$= \pm F_{Br} \cdot 0 - F_V \cdot l_1 \pm F_H \cdot 0$
$+ F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4 \rightarrow$

$$F_V = \frac{F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4}{l_1}$$

$$F_V = \frac{+151{,}0 \cdot 1000 + 539{,}3 \cdot 426 + 37{,}7 \cdot 640 + 134{,}8 \cdot 575}{1044} \cdot \frac{N \cdot mm}{mm}$$

$F_V = 462\,N$

In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme.
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$\Sigma F_x = 0$

$= + F_{Br} - F_{G1x} - F_{G2x} \rightarrow$

$F_{Br} = F_{G1x} + F_{G2x}$

$= 151{,}0\,N + 37{,}7\,N = 189\,N$

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

$\Sigma F_y = 0$

$= F_V - F_{G1y} - F_{G2y} + F_H \rightarrow$

$F_H = - F_V + F_{G1y} + F_{G1y}$

$= -462{,}0\,N + 539{,}3\,N + 134{,}8\,N$

$= 212\,N$

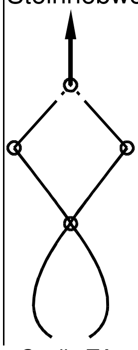
Beispiel: mit Zusammensetzen

Beispiel: HP 83/84-2 Hebestation

Beispiel Kippaufgabe

Beispiel für FTM

Steinhebwerkzeuge



Statik_TA_allgemein-rechnerisch-Auflager.odt

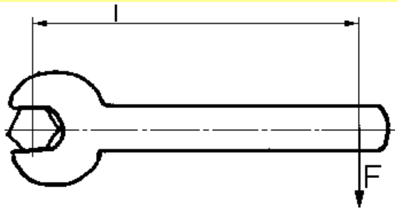
Seitenumbruch

Statik: Sonstiges

Drehmoment, Hebel

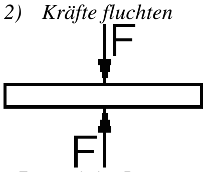
FTM, MVK: ca. 90' Zeitbedarf (ca. 45' ohne Übungen)
TG: entfällt

z.B. Schraubenschlüssel



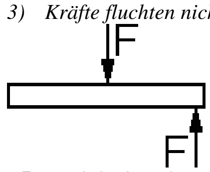
1) Ein: Bleistift o.ä. auf dem OH-Projektor anschieben

2) Kräfte fluchten



Σ F = 0 → keine Bewegung

3) Kräfte fluchten nicht



Σ F = 0 → keine Längsbewegung
aber Drehbewegung

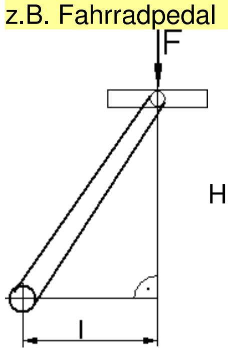
4) Wie erfasst man „Drehkräfte" ?

(Dreh-)Moment M = F · l [in Nm]
Kraft x Hebelarm

Merke: Einheit Nm = J gilt auch für die Arbeit und darf dennoch nicht verwechselt werden

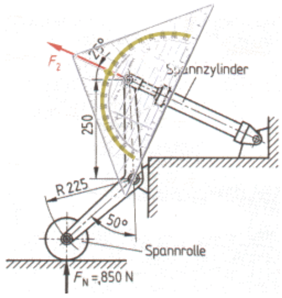
W = F · s	F ‖ s	parallel
M = F · l	F ⊥ l	rechtwinklig

z.B. Fahrradpedal



Hebelarm senkrecht zur Kraftlinie

Der Hebelarm kann mit dem Geodreick ermittelt werden: Kraft auf die 90°-Linie, Hypothenuse durch den Drehpunkt, Hebelarm an der Skale ablesen:
Quelle des Bilduntergundes: [EuroRBM]

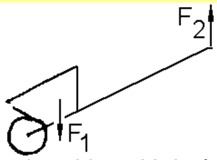


Gleichgewichtsbedingungen

bei mehreren Momenten

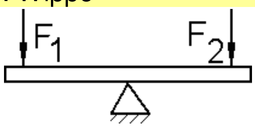
1) Wie Verhältnisse, wenn mehrere Momente auftreten

z.B. Schubkarre



einseitiger Hebel

z.B. Wippe



zweiseitiger Hebel

Σ M = 0 (Summe aller Momente)
Σ F = 0 (Summe aller Kräfte)

Erinnere: Gleichgewichtsbedingung bei Kräften
⇒Gleichgewichtsbedingung bei Drehmomenten
Zwar mit Σ F = 0 beginnen, dies zunächst eine Zeile frei lassen und dann Σ M = 0 darüber schreiben, weil man bei der Berechnung damit anfangen sollte.

oder $$\Sigma M_{li} = \Sigma M_{re}$$

Summe der links drehenden Momente = Summe der rechts drehenden Momente

gebogene Pfeile ergänzen

Vertiefung

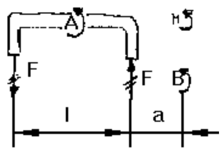
EuroRBM
EuroRBM „Lage des Einsannzapfens"

Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.
Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit oä. im Spiel.
1. Einzelkräfte gibt es nicht und 2. sie würden sie keine Drehung bewirken. Ohne Reibung, Lager, Trägheit o.ä. gäbe es nur eine Verschiebung.
Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

z.B. Fahrradlenker



A: $M = F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l$

B: $M = F \cdot (l + a) - F \cdot a = F \cdot l$

Für das Moment am Lenker spielt es keine Rolle, ob man es im Punkt a oder im Punkt B berechnet: Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch jedes andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Am Faden aufgehängtes Lineal einführen

Vertiefung

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 1..8
MVK: [EuroRBM]

Statik_TA_Moment-Hebel.odt
Seitenumbruch

Reibung

Ein Körper, der andere berührt, setzt einer Bewegung einen Widerstand entgegen.

⇒ Reibungskraft bzw. Reibungswiderstand F_R

Einflüsse auf die Reibung haben

Normalkraft

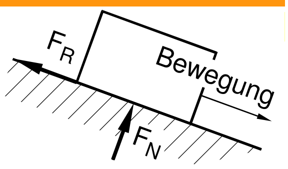
Werkstoffpaarung
Oberflächengüte
Schmierzustand
Reibungsart
} zusammengefasst in Reibungszahl μ oder f

Haft-, Gleit-, Roll-, Wälzreibung

Berechnung

Haft- und Gleitreibung

$$F_R = \mu \cdot F_N$$



– F_N = Kraft senkrecht zur Trennfläche

μ = Reibungskoeffizient für die Werkstoffpaarung

μ_H : Haftreibung (= Höchstwert !)

μ_G : Gleitreibung

$\mu_H > \mu_G$

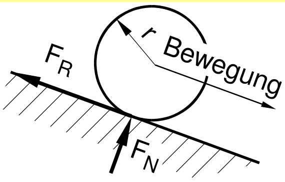
Reibwerte sind keine tatsächlichen Werte, sondern mögliche Höchstwerte

Rollreibung

$$F_R = \frac{f \cdot F_N}{r}$$

f = Rollreibungskoeffizient

r = Radius



Lager

Reibmoment wird wie bei Gleitreibung berechnet

$$M_R = \mu \cdot Fn \cdot r$$

μ(Gleitlager) hängt ab vonWerkstoffpaarung

μ(Wälzlager) μ = 0,001 .. 0,003

Übung

Zusatzfragen

1) EuroMRb27 S.110 Aufg. 3) Welchen Zweck haben die zusätzlichen Scheiben bei Mehrscheibenkupplungen ? (zusätzliche Fläche erhöht die Reibkraft nicht ?!)?

Mehrscheibenkupplungen erhöhen das Reibmoment, weil jede Berührfläche Belag - Scheibe die volle Normalkraft überträgt, während die Vergrößerung der Fläche eines Belages bei konstanter Normalkraft die Flächenpressung senkt.

Mehrere Bremsbeläge in Reihe bewirken, dass die Normalkraft höher angehoben wird.

Veranschaulichung: Welches Gewicht zeigen zwei Personenwaagen an, wenn man

– sie nebeneinander stellt und mit je einem Bein draufsteht?
– sie aufeinander legt und dann drauf steht?

MVK:
FTM, TG: entfällt

FO Asterix, Pyramidenbau, Steine ziehen

1) Ein: Was macht den Arbeitern, außer der Peitsche, die Arbeit schwer ?

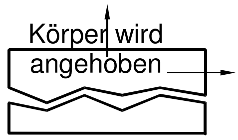
2) Tatsächlich betrachten wir nur die Festkörperreibung.

3) Welche Größen haben Einfluss auf die (Festkörper-)Reibung, bzw. wie könnte man den Arbeitern das Leben erleichtern ?

Normalkraft ist die Kraft senkrecht zur Trennfläche der beiden Körper. Es ist nicht immer das Gewicht, z.B. Bremsbacke, Kupplung, Verschraubung, schiefe Ebene usw.

Versuche: Reibungskraft mit verschiedenen Flächen, Werkstoffen, Gewichten

Die Reibungskraft hängt nicht von der Größe der Fläche ab, weil die Flächenpressung mit steigender Fläche proportional sinkt.



Tatsächlich, besonders bei nicht starren Körpern, gibt es noch andere Einflussfaktoren, z.B. Fläche, Schlupf, Schmierung usw.. So haben Autoreifen die beste Haftung bei 10-20% Schlupf (ABS; 0% Schlupf heißt, dass keine Bremskraft abgerufen wird), niedriger Geschwindigkeit und niedrigem Luftdruck (Fläche).

FO Bremskraft [Bosch 21]

Kraft muss nicht nach unten wirken, z.B. Bremsbacke, Kupplung, schiefe Ebene

[EuroTabM]„Reibung"

Bei Haftreibung hat noch keine Bewegung stattgefunden. Die errechnete Haftreibungskraft ist nicht die tatsächliche Kraft, sondern die Obergrenze der übertragbaren Kraft.

Dass die Haftreibung größer als die Gleitreibung ist, erfährt man beim Anschieben eines Kfz.

Überleitung an Hand TabB: Verhältnisse bei Rollreibung

Versuch: verschiedene Rollen auf Zahnstange

TabB: Der Rollreibungskoeffizient sinkt mit steigender Härte der Werkstoffe, vermutlich weil die plastische Verformung abnimmt. Der Einfluss der elastischen Verformung (hängt nicht von der Härte ab, unterliegt aber einer Hysterese durch innere Reibung) spielt keine große Rolle.

Je größer der Radius ist, desto geringer wird die Reibung, vergleiche mit den Rädern von Fahrrädern, Lokomotivrädern, Walzkörpern (Nadellager) usw. Lager sollen aber einen möglichst kleinen Durchmesser haben, da er in das Reibmoment eingeht.

Überleitung an Hand TabB: Verhältnisse bei Rollreibung

Typische ingenieurswissenschaftliche Vereinfachung.

⇒ nicht im TabB

⇒ EuroTabM30 S.41

EuroMRb27 S.110

HP 83/84 Hebestation

2) EuroMRb27 S.110 Aufg. 4) Müssen die beiden Schrauben mit der vollen Kraft oder mit der halben angezogen werden ?

2 Kräfte addieren sich zur erforderlichen Normalkraft, deshalb genügt es, jede Schraube mit der halben Kraft zu belasten.

3) EuroMRb27 S.110 Aufg. 5) Warum wird mit 3,5 kN belastet, aber mit 5kN gerechnet ?

4) EuroMRb27 S.110 Aufg. 6) Ültg zur schiefen Ebene

MVK: ca. 90' Zeitbedarf
FTM, TG: entfällt

Schiefe Ebene

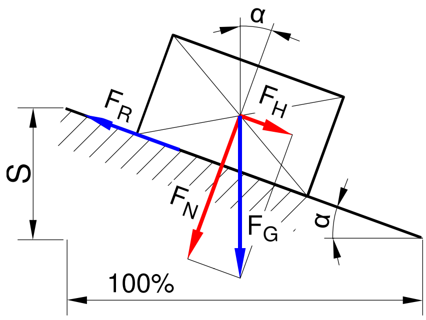
Kräfte

Steigung in %

Steigung $S=\frac{h}{l}=\tan\alpha$

Steigung 100% bedeutet 45°.

Grafik



Die Gewichtskraft F_G zerlegt sich in

Hangabtriebskraft F_H

$$F_H = F_G \cdot \sin\alpha$$

F_H will den Körper beschleunigen

Normalkraft F_N

$$F_N = F_G \cdot \cos\alpha$$

F_N bremst den Körper indirekt durch

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos\alpha$$

Bewegung

tritt ein, wenn $F_H > F_R$ ist.

Reibwinkel

Empirisch kann der Reibwinkel ermittelt werden, indem man die Unterlage kippt: Ein aufliegendes Teil beginnt beim Reibwinkel zu rutschen.

$$F_H=F_R$$

$$F_G \cdot \sin\alpha=\mu \cdot F_G \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow$$

$$\mu=\frac{F_G \cdot \sin\alpha}{F_G \cdot \cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

Vertiefung

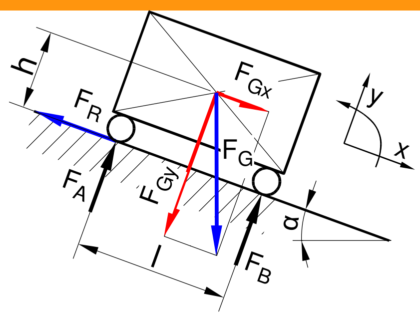
EurMRB ist wenig ergiebig

1) Berechnen Sie die Bremskraft und den Reibungskoeffizienten eines Fahrzeuges aus seiner Masse und seinem Bremsweg (z.B. Volvo S80 mit 40,5m Bremsweg aus 100km/h bei 1695kg - mot 25/98 S.29) (Formel aus TabB "Beschleunigung")
2) Berechnen Sie Bremskraft und Bremsweg des selben Fahrzeuges bei 10% Gefälle / Steigung

Auflager

Koordinatensystem wird wegen der Bemaßung zweckmäßig parallel zur schiefen Ebene gelegt.

Es gibt zwei prinzipielle Vorgehensweisen:
1) Hebelarme zu FG berechnen. Dieser Weg ist möglich, aber bei jeder Aufgabe anders zu lösen.
2) FG wird in FGx und Fgy zerlegt, anschließend rechnet man mit beiden Kräften. Bei diesem Weg ist die Vorgehensweise einfacher und immer gleich und deshalb weniger fehlerträchtig.



Die Lage des Schwerpunktes geht in die Drehmomente ein:

$$\Sigma M_A=F_B \cdot l-F_x \cdot h-F_y \cdot \frac{l}{2}$$

ΣM_B analog

$$F_B=\frac{F_G \cdot \sin\alpha \cdot h+F_G \cdot \cos\alpha \cdot \frac{l}{2}}{l}$$

Vertiefung

Abi-Aufgaben

Statik_TA_Schiefe-Ebene.odt

Vertiefung

[Böge Aufg.] Aufgabe 83 .. 159

Seitenumbruch

Festigkeitslehre
Mögliche Wiederholung

Zugversuch

Quellen: DIN EN 10002:2001 Metallische Werkstoffe - Zugversuch in [Klein 2008], [Bargel/Schulze 2005], [Hering 1992],

1) Ein: Bauarbeiter unter schwebender Last; Bungeespringen
Was gibt dennoch einigermaßen Sicherheit?

2) Aufbau und Ablauf mündlich entwickeln, anschließend Zugversuch in der Werkstatt durchführen oder Video zeigen.

Prüfungen sind lange üblich, z.B. enthält [Musschenbroeck 1729] Hinweise zu Prüfmaschinen und Spannungsprüfungen bei Drähten [Ferguson 1992] S.204, Fußnote 9). Ein anderes Beispiel ist [Agricola 1548]

Zweck

dient der Ermittlung des Werkstoffverhaltens bei einachsiger Zugbeanspruchung und liefert wichtige Werkstoffkennwerte, die auf viele andere Belastungsarten übertragbar sind.

Durchführung

[EuroTabM] „Zugversuch“

FO verschiedene Zugproben

FO Einfluss des Längenverhältnisses auf die Bruchdehnung

AM Papierstreifen

FO gespante und umgeformte Gewinde

Zugprobe

wegen ihres Einflusses auf das Ergebnis sind genormt:
- Form (rund oder flach)
- Zylinderköpfe (glatt oder Gewinde)
- Oberfläche (Rz 6,3)
- Längenverhältnis (Proportionalstäbe)

Kurzer Prop.-Stab rund bzw. beliebig	Langer Prop.-Stab (für Sonderfälle)
$\frac{L_0}{d_0}=5$ bzw. $\frac{L_0}{\sqrt{S_0}}=5{,}65$	$\frac{L_0}{d_0}=10$ bzw. $\frac{L_0}{\sqrt{S_0}}=11{,}3$

Abhängig vom Längenverhältnis ist z.B. die Bruchdehnung A, weil die Verformung nach der Einschnürung nicht von der Anfangslänge abhängt.

Die Proportionalitätsfaktoren k = 5,65 bzw. 11,3 ([Bargel/Schulze 2005] S.98; [EuroTabM] 44. Auflage, Fußnoten Seite 130) für beliebige Querschnitte wurden im Abi bisher nicht verwendet, sondern nur $L_0/d_0 = 5$ bzw. $L_0/d_0 = 10$ für runde Proportionalstäbe, gelegentlich mit Umrechnung in entsprechende Flachproben.
Die Proportionalitätsfaktoren k = 5 für runde Stäbe und k = 5,65 für beliebige Stäbe können ineinander umgerechnet werden.

$$\frac{L_0}{\sqrt{S_0}}=\frac{L_0}{\sqrt{\pi/4\cdot d_0^2}}=\frac{L_0}{\sqrt{\pi/4}\cdot d_0}=\frac{5}{\sqrt{\pi/4}}=5{,}642\sim 5{,}65$$

Ablauf

man zieht die Zugprobe langsam und ruckfrei bis zum Bruch und zeichnet die Kraft F und Länge L auf.

Langsam und ruckfrei wegen dynamischer Kräfte, vergleiche: Spalten von Holz

Standardisierung

Werkstoffkennwerte werden unabhängig von den Maßen des Bauteiles angegeben.

Damit die Ergebnisse unabhängig von der Probengröße werden, werden sie auf Querschnittsfläche und Länge der Probe bezogen. Tatsächlich sind die Ergebnisse verschiedener Proben nicht genau vergleichbar, weil die durchaus vorhandenen Einflüsse von Oberfläche und Längenverhältnis dabei vernachlässigt werden. So sind im Tabellenbuch die Streckgrenzen R_e von Stahl abhängig von der Erzeugnisdicke angegeben, und bei der Bruchdehnung gibt man das Längenverhältnis als Index an (z.B A_5 oder A_{10}), weil es einen Einfluss hat.
Andere Beispiele: zulässige Stromdichte
Spannung ist auf Fläche bezogene Kraft.

Zugkraft F ↔ Zugspannung σ_Z

$$\sigma_z=\frac{F}{S_0}\quad \%in\left[\frac{N}{mm^2}=MPa\right]$$

S_0 = Anfangsquerschnitt

Ingenieure rechnen mit Zugspannungen, die auf den Anfangsquerschnitt bezogen sind, und ignorieren, dass der Querschnitt kleiner und die tatsächlichen Spannungen größer werden, weil man Bauteile kaum noch beeinflussen kann. Dagegen betrachten Festkörperphysiker bei der Untersuchung von Werkstoffverhalten die tatsächlichen Spannungen im engsten Querschnitt.

100% = 1, kann in der Formel auch entfallen

Längenänderung ΔL ↔ Dehnung ε

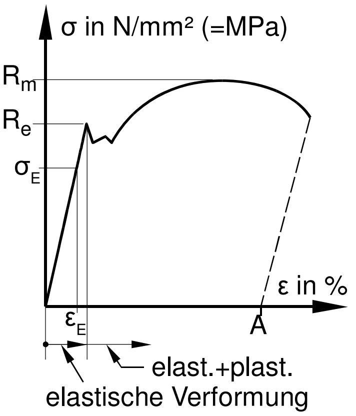
$$\epsilon=\frac{L-L_0}{L}$$

L_0 = Anfangsmesslänge

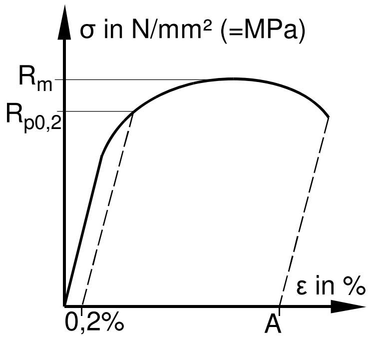
Die Werte werden aufgezeichnet im

Spannungs-Dehnungs-Diagramm

mit ausgeprägter Streckgrenze



ohne ausgeprägte Streckgrenze



3) Beschreiben Sie den Kurvenverlauf (makroskopische Vorgänge)
4) dann Bezug auf die mikroskopischen Vorgänge
AB verschiedene gezogene Zugproben

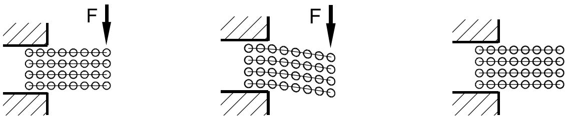
AB SDD kombiniert mit Gitterbildern

Vorgänge im Werkstoff

Metallische Gitter sind einfach angeordnet

elastische Verformung

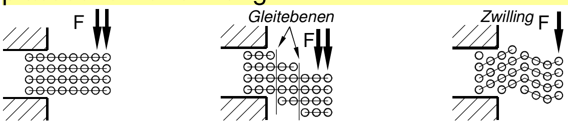
vorher unter Last nachher



Werkstoff verhält sich wie eine Feder und nimmt nach Entlastung die ursprüngliche Form wieder an.

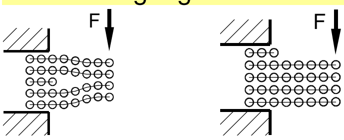
Einschwingverhalten

plastische Verformung



Werkstoff wird bleibend verformt

Kaltverfestigung.



Gitterfehler werden geschlossen, die Streckgrenze eines Metalles steigt beim Umformen (Walzen, Schmieden ..)

Einschnürung

Nach Überschreiten von R_m tritt Einschnürung der Probe ein. Die Kraft im Diagramm sinkt bis zum Bruch.

Kennwerte aus dem Zugversuch

Es gilt das Hooke'sche Gesetz: $\sigma = E \times \varepsilon$

Streckgrenze R_e – Dehngrenze $R_{p0,2}$

= Grenze des elastischen Bereiches [N/mm² = MPa]

Elastizitätsmodul E

[kN/mm²] (E-Modul)

- ist ein Maß für die Steifigkeit
- $E=\frac{\sigma_E}{\epsilon_E}$ mit einem Wertepaar (σ_E; ε_E) von der Hooke'schen Geraden

Zugfestigkeit R_m

in [N/mm² = MPa]

- das Überschreiten von R_m führt zum Bruch

Bruchdehnung A

in [% oder ohne Einheit]

- Bleibende Verformung nach dem Bruch

Brucheinschnürung Z

⇒ TabB

Streckgrenzenverhältnis V_S

$$V_S=\frac{R_e}{R_m}$$

Vertiefung

1) Ordnen Sie Kurven mit verschiedenen Streckgrenzenverhältnissen zu:

Bruchgetrenntes Pleuel, FO Tiefziehen

Seil einer Hängebrücke (plastische Verformung erwünscht, um Überlastung anzuzeigen)

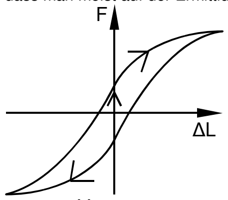
Video Zugversuch

Zeigt Durchführung des Zugversuches und Ermittlung der Kennwerte

0050 Universalprüfmaschine
0075 genormter Prüfstab mit Gewindeköpfe
0100 genormte Geschwindigkeit, Dehnung, Schleppzeiger für F_m
0147 Einschnürung

Seitenumbruch

Tatsächlich ist die elastische Verformung im oberen Bereich nicht genau linear. Doch die Abweichungen von der Geraden sind schwer zu ermitteln und meist vernachlässigbar, sodass man meist auf der Ermittlung der Proportionalitätsgrenze verzichtet.



Hystere
beim Zugversuch

Auch beim elastischen Verformen von Material kommt es durch innere Reibung zu einer Hysterese [Bargel/Schulze 2005] S.112. Deshalb wollen Radfahrer möglichst steife Fahrradbauteile.

AB Hysterese

Man unterscheidet: (1) linear elastisches Verhalten, für das das Hooke'sche Gesetz gilt (gilt für alle Festkörper für kleine Verformungen bis ε=0,1%); (2) nicht-linear- elastisches Verhalten, z.B. Gummi und (3) anelastisches Verhalten (elastische Hysterese): der Werkstoff gibt nicht mehr die ganze Verformungsenergie zurück [Hütte 29] D42. [Hering 1992] S.92.

Mit der Dehnung ε ist eine Verringerung des Querschnittes verbunden. Ihr Maß ist die Querkürzung ε_q bzw. die Poisson- oder Querdehnzahl ν. Sie beträgt für Stahl ν = 0,3 [Decker 2009] S.30. $\nu=\frac{\epsilon_q}{\epsilon}$

Die Einschwingphase bei Werkstoffen mit ausgeprägter Streckgrenze entsteht nach der 2011 geltenden Theorie durch Zwischengitteratome (C, N), die etwas größer sind als die Zwischengitterplätze und das Wirtsgitter verzerren. Durch die energetische Situation bewegen sich die ZGA bei angelegter (Zug-)Spannung auf Versetzungen zu, bilden dort s.g. Cottrell-Wolken und blockieren Versetzungen (erhöhen Streckgrenze). Wenn endlich die Versetzung eintritt, verlieren die Fremdatomwolken ihre Wirkung und die relativ hohe Spannung dehnt den Werkstoff. Wenn man ihn altert, kann der Effekt wieder auftreten. [de.Wikipedia.org/../Cottrell-Wolke], [Bargel/Schulze 2005] S.105f.

Umklappen eines nichtorthogonalen Gitters ist ebenfalls möglich.
Gleitebenen gehören zu den typischen metallischen Eigenschaften. Sie werden möglich durch Isotropie (richtungsunabhängige Bindung) der Metalle, die zu einfachen und dichten Gittern führt.

Die Verschiebung endet an den Korngrenzen oder an Gitterfehlern.
Ohne Gitterfehler wären Metalle praktisch nicht verformbar bzw. bearbeitbar. Bei monokristallinem Fe wird die R_m ≈ 14000N/mm² errechnet, tatsächlich ist R_m (Fe) ≈ 150 N/mm². Die Verschiebung entlang der Gitterebene muss also abgeschwächt sein.

Bruchmechanismen siehe [SdW] 01/2000

Die Spannung im Diagramm sinkt nach R_m zwar augenscheinlich, die tatsächliche Spannung im engsten Querschnitt steigt aber weiter an. Es tritt auch noch Kaltverfestigung auf.

[EuroTabM] „Zugversuch“

DIN EN 10002:2001 unterscheidet Obere (R_{eH}) und untere (R_{eL}) Streckgrenze [Klein 2008], [Bargel/Schulze 2005]. Ich verwende die obere Streckgrenze R_e wie in [EuroTabM].
Rp auch technische Elastizitätsgrenze.

[EuroTabM] „Elastizitätsmodul“; Tabellenwerte → [Hütte 29] E66 und D44

Der (!) E-Modul ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Normalspannung und Dehnung. Bildlich ist er eine Federkostante oder die Steigung der Hooke'schen (!) Geraden und damit die gedachte Spannung für 100% Dehnung. Vergleiche auch Schubmodul G für Schubspannungen und Kompressionsmodul K für hydrostatischen Druck.

E-Modul aus SDD ermitteln (HP96/97-3)

R_m ist eine rechnerische Größe mit dem Anfangsquerschnitt S_0, die für Konstruktionen zweckmäßig ist. Will man das Werkstoffverhalten untersuchen, legt man den tatsächlichen Querschnitt zugrunde und erhält eine wesentlich größere Spannung.

Bruchdehnung A_5 oder $A_{11,3}$ gibt das Längenverhältnis der Probe an (starker Einfluss).

FO Zugprobe: Folgen des Längenverhältnisses

[Bargel/Schulze 2005] S.96: Die Rückfederung parallel zur Hooke'schen Geraden ist eine Vereinfachung, die bei höheren Temperaturen oder Kriechversuchen nicht zulässig ist.

Verhältnis kleinster Querschnitt nach Bruch zu Anfangsquerschnitt.
Verformungskennwerte (Bruchdehnung, Brucheinschnürung, Dehnung bei Höchstkraft) dienen nicht der Konstruktion, aber der Beurteilung des Werkstoffverhaltens.

Wird benötigt bei:
- Festigkeitsklassen von Schrauben
- Umrechnung von Brinellhärten auf R_m
- Anhaltswert der Verformbarkeit für Umformverfahren

Gespeicherte Energie im elastischen Bereich , Verfomungsenergie im plastischen Bereich (Zähigkeit) und freiwerdende elastische Energie beim Bruch berechnen.[Hering 1992] S.92

0160 Rm = F_m / S_0
0170 Spannungs-Dehnungs-Diagramm
0185 R_{eH}, R_{eL}, R_m
0199 Diagrammschreiber, Kraftanzeige
0234 ohne ausgeprägte Streckgrenze, $R_{p0,2}$, F_m und ε-Anzeige; mehrmaliges Be- und Entlasten mit steigender Kraft zur Ermittlung von $R_{p0,2}$
0330 Zeichnerische Ermittlung
0340 Bruchdehnung messen
0376 Vergleich St-60 und St-37 im Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit Kraftanzeige

Zugversuch im Mindmap

Zugversuch

Ablauf

Probe wird mit konstanter Geschwindigkeit (=ruckfrei) gezogen und die Kraft F und die Verlängerung ΔL gemessen.

Standardisierung

Kraft F [N] ↔ Spannung σ [MPa]
Verlängerung ΔL [mm] ↔ Dehnung ε [%]

unabhängig von der Probengröße

Diese Umrechnung kommt im Abi immer vor !

$$\epsilon=\frac{L-L_0}{L} \quad in[\%\, oder\, o.E.]$$

$$\sigma_z=\frac{F}{S_0} \quad in\left[\frac{N}{mm^2}=MPa\right]$$

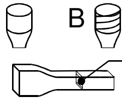
Zugprobe

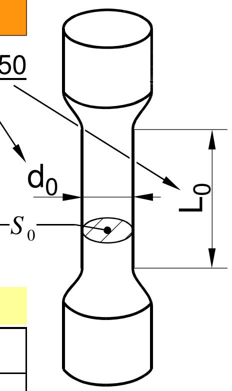
z.B. DIN 50125 – A 10x50

Form

rund: A B

flach: E



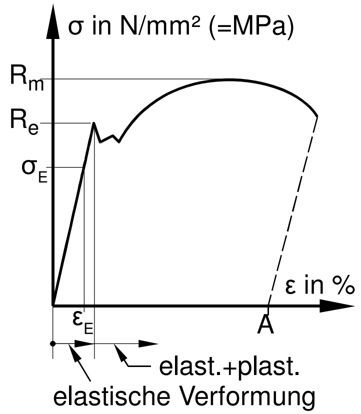


Proportionalstäbe

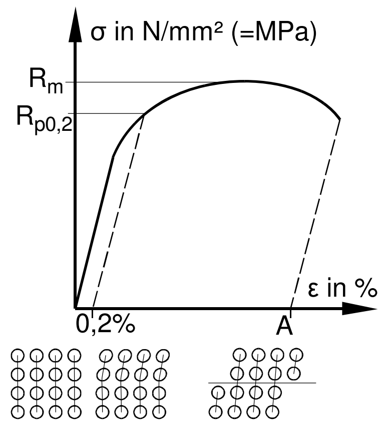
	rund	flach
kurzer P.-Stab	$\frac{L_0}{d_0}=5$	$\frac{L_0}{\sqrt{S_0}}=5{,}65$
langer P.-Stab	$\frac{L_0}{d_0}=10$	$\frac{L_0}{\sqrt{S_0}}=11{,}3$

Spannungs-Dehnungs-Diagramme

mit ausgeprägter Streckgrenze



ohne ausgeprägter Streckgrenze



Kennwerte

- R_m: Zugfestigkeit [N/mm²]
- R_e: Streckgrenze [N/mm²]
- $R_{p0,2}$: Dehngrenze [N/mm²]
- A: Bruchdehnung [%]
- E: Elastizitätsmodul [kN/mm²]

$$E=\frac{\sigma_E}{\epsilon_E} \quad in\left[\frac{kN}{mm^2}\right]$$

Seitenumbruch

Festigkeitsberechnung in Kurzform

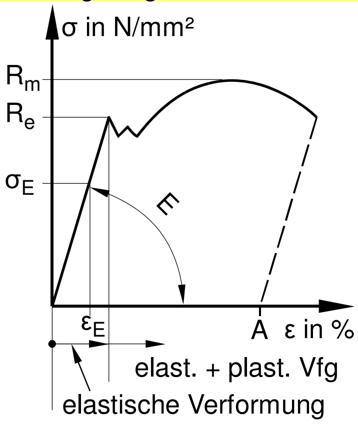
Zugversuch

1) Probe ziehen
2) Kraft und Verlängerung messen
3) Wegen der Übertragbarkeit umrechnen

$$Spannung\ \sigma = \frac{F}{S} = \frac{Kraft}{Querschnitt}\ in \left|\frac{N}{mm^2}\right|$$

4) Im Diagramm darstellen

Spannungs-Dehnungsdiagramm



Werkstoffkennwerte σ_{lim}

= Grenzwerte

R_m Zugfestigkeit [N/mm²] („Bruchspannung“)

$R_{p0,2}$ / R_e Dehngrenze / Streckgrenze [N/mm²]

Auslegung von Bauteilen

Die Reihenfolge hängt von der Aufgabe ab

1. Bauteil-Kräfte F oder -Momente M ermitteln s.o. (Statik)
2. F / M mit dem Querschnitt S / W in die Bauteil-Spannung σ / τ umrechnen

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

3. Werkstoffkennwert σ_{lim} / τ_{lim} ermitteln i.d.R. aus TabB
4. Aus σ_{lim} / τ_{lim} und der Sicherheitszahl ν die zulässige Spannung σ_{zul} / τ_{zul} berechnen

$$\frac{\sigma_{lim}}{\nu} = \sigma_{zul}$$

ν ist abhängig von Belastungsfall (⇒TabB), Wert, Folgen, Zuverlässigkeit der Bauteilspannung, Form des Bauteiles usw.

5. Prüfen, ob die zulässige Spannung σ_{zul} / τ_{zul} größer als die die Bauteil-Spannung σ / τ ist.

$$\frac{\sigma_{lim}}{\nu} = \sigma_{zul} > \sigma = \frac{F}{S}$$

Ansonsten neuer Querschnitt oder Werkstoff

Zur Wdh. oder Einführung, wenn es noch nicht unterrichtet wurde: Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, Kennwerte, Formeln

1) Wozu dient die Ermittlung der Kräfte?

Zur Berechnung der Festigkeit, d.h. Vergleich tatsächlicher Kräfte mit Erlaubten.

2) Wie werden die einen Werkstoff maximal möglichen Kräfte ermittelt?

z.B. im Zugversuch

3) Wie wird der Zugversuch durchgeführt und ausgewertet?

Kraft und Verlängerung wird gemessen und in Spannung und Dehnung umgerechnet, damit die Werte übertragbar werden. Im Zugversuch wird der Anfangsquerschnit S_0 verwendet, weil dies messtechnisch leicht erfassbar ist und der praktischen Realität entspricht.

EuroTabM39 S.160 „Zugversuch“

4) Welche Kennwerte sind für die Festigkeitsberechnung wichtig?

Kennwerte aus dem Zugversuch können z.T. auf andere Belastungsarten angepasst werden

Grobe Zusammenfassung, nicht im TG unterrichten

5) Wie stark muss die Welle ausgelegt werden?

Zur Begründung der Sicherheitszahl

Merke: „Eine genaue rechnerische Vorhersage der vorhandenen Bauteilsicherheit kann aufgrund der nur schwer erfassbaren Einflussgrößen, der z.T. recht erheblichen Streuung der Festigkeitswerte und der Vereinfachung im Rechnungsansatz nicht gemacht werden.“ [Roloff/Matek 1995] S.52]

Für Grenzspannung ist der Belastungsfall zu beachten. Die angegebenen Werte gelten nur für einachsige Spannungszustände.

„Festigkeitswerte EuroTabM39 S43ff „Festigkeitswerte“

Werkstoffwerte EuroTabM39 S117ff „Werkstoffe“

Festigkeitslehre

Im TG kann das Thema mit einigen Referaten behandelt werden. Ausgabe der Referatthemen nach der Einführungsstunde.

FO Referatthemen zur Festigkeitslehre

Festigkeitsberechnungen

FTM, MVK, TG: Im TG kann das Thema mit einigen Referaten behandelt werden. Ausgabe der Referatthemen nach der Einführungsstunde.

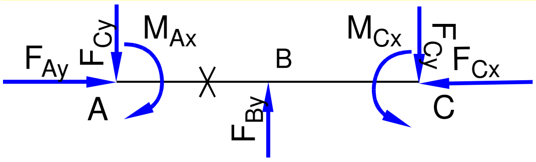
Einarbeiten: [Decker 2009]; [Steinhilper 2007 I]; [Mattheck 2003]; [Hering 1992], [Roloff/Matek 1995]; [Bargel/Schulze 2005]

FO Referatthemen zur Festigkeitslehre

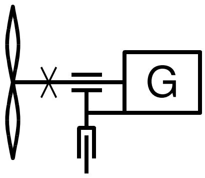
Werkstoffkunde und Statik fließen hier zur Festigkeitslehre zusammen.

Kräfte ermitteln

Äußere Kräfte: Freimachen (→ Statik)



1) Welche Belastungen (Kräfte und Momente) wirken an der Stelle x auf die Welle eines Windgenerators?



G unterscheidet den Generator vom Propeller mit Motor M.

- F_{AX}: Windkraft auf Propeller
- F_{AY}: Eigengewicht Propeller
- M_{Ax}: Drehmoment durch Wind auf Propeller (Torsion um die x-Achse)
- F_{By}: Stützkraft des Lagers
- F_{Cx}: Axiallager im Generator um Fay aufzufangen
- F_{Cy}: Radiallager im Generator
- M_{Cx}: Drehwiderstand im Generator durch Lorentzkraft

Innere Kräfte: Freischneiden

- An der Stelle x, die betrachtet werden soll
- Alle externen Kräfte auf einer Seite eintragen
- Interne Kräfte an der Schnittstelle ergänzen, bis das Teil im Gleichgewicht ist.

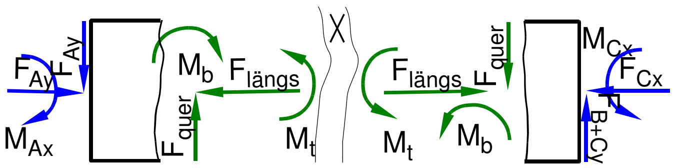
2) Welche Kräfte und Momente werden an der Stelle x übertragen?

Externe Kräfte (vereinfacht in der Ebene) ohne Betrag mit Richtung eintragen lassen.

3) Kräfte an der Schnittstelle eintragen lassen.

An der Schnittstelle der Welle wirken:

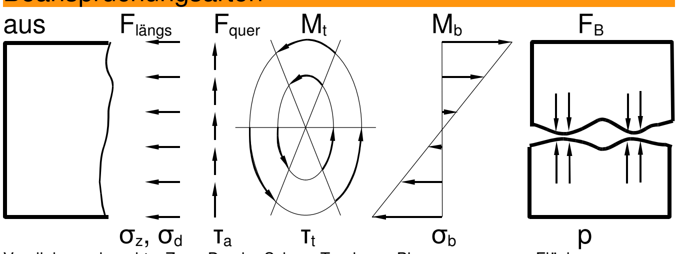
- $F_{längs}$: Druckkräfte heben F_{Ax} auf
- M_t: Torsionsmoment hebt M_{Ax} auf
- F_{quer}: Scherkräfte heben F_{Ay} auf
- M_b: Biegemoment entsteht durch F_{Ay} und den Hebelarm



Zum Verständnis: Innere und äußere Kräfte des linken „Bruch-"stückes heben sich auf, genau wie die inneren Kräfte links und rechts des Bruches und die Kräfte am rechten Bruchstück.

[Decker 2009]: Äußere Kräfte (Belastung) bewirken innere Kräfte (Schnittlasten).

Beanspruchungsarten



Von links nach rechts: Zug-, Druck-, Scher-, Torsions-, Biegespannungen, Flächenpressung

Begriff Beanspruchungsarten siehe [Decker 2009] S.25

4) Wie verteilen sich die Kräfte im Werkstück? → Spannungen

- $F_{längs}$ (Normalkraft zur Schnittfläche) bewirkt Druck-/Zugspannungen (Normalspannungen).
- p (Flächenpressung) Druckbeanspruchung an Berührungsflächen.
- F_{quer} (Querkraft zur Schnittfläche) bewirkt Scherspannungen (Schubspannungen).
- M_T (Torsionsmoment) erzeugt Torsionsspannungen (Schubspannungen). Sie verlaufen etwa 45° zur Schnittfläche, zum Beweis Torsionsbruch einer Kreide zeigen.
- M_b (Biegemoment) erzeugt Dehnung, die linear abhängig vom Abstand zur Drehachse ist (Strahlensatz). Dehnung erzeugt Druck-/Zug- (Normalspannungen), die ebenfalls linear zusammenhängen (Hookesche Gesetz), sodass der Spannungsverlauf im elastischen Bereich theoretisch linear ist. Im plastischen Bereich (Umformen) gilt dies nicht mehr.

Die Beanspruchungen bewirken eine Längenänderung (Hooke'sches Gesetz, für viele Stoffe annähernd linear) und Querschnittsänderungen.

(Knickung)

Knickung ist bei langen schlanken Körpern eines wesentlichere größere Belastung als Druck, steht aber nicht im Lehrplan. Bei Flächen tritt Beulung auf.

Überlagerte Spannungen

Überlagern sich Normal- und Schubspannungen, wird eine Vergleichspannung σ_V errechnet. Hypothesen:

- Normalspannungsh. NH, Rankine 1861
- Schubspannungsh. SH, Tresca 1868
- Gestaltänderungsh. GEH, v.Mises, 1913

Details: [Decker 2009] S.28f

Beispiel für überlagerter Normalspannungen: Eine Spannbetonbrücke wird unten durch Stahleinlagen auf Druck gespannt. Biegt sich die Brücke unter Last, wird der Beton (geringe Zugfestigkeit) nicht auf Zug belastet, sondern vom Druck. Ähnlich übereinander geschrumpfte Rohre für Kanonen.

Kein Abithema

Belastungsfälle, Lastfälle

5) anhand [EuroTabM]

Lastfall I: Ruhende Belastung

einziger Lastfall für Abi

Ruhende Belastung halten Teile am besten aus, vgl. Pyramiden

<u>Lastfall II: Schwellende Belastung</u>

<u>Lastfall III: Wechselnde Belastung</u>

Vertiefung

[Böge Aufg.] Aufgabe 651-656 (nicht erforderlich)

Seitenumbruch

Allzweckformel für die Festigkeitslehre

am Beispiel der Zugfestigkeit

$$\frac{\sigma_{lim}}{\nu} = \sigma_{zul} > \sigma = \frac{F}{S}$$

F äußere Kraft [N]
oder andere Belastung: Moment M_b oder M_t [Nm]

S Querschnittsfläche [mm²]
(gemeint ist immer die Fläche, die kaputt geht)
oder andere Flächenkennwerte
Widerstandsmomente W oder W_p

σ tatsächliche Spannung [N/mm²] im Werkstoff, mithilfe Rechnung geschätzt
oder Schubspannung τ

σ_{lim} Grenzspannung [N/mm² = MPa] im Werkstoff
Werkstoffkennwert, z.B. R_m, R_e, $R_{p0,2}$, σ_{bF}, τ_{tF}

ν Sicherheitszahl [ ]
ist eine typische Ingenieurslösung !
vom Konstrukteur festgelegt nach:
- Umfang der Unwägbarkeiten (Belastung, -sfall, überlagerte Spannungen..)
- Risiko, Wert
- gesetzliche Vorschriften
- Erfahrung
- Veränderung während der Lebensdauer (Korrosion, Alterung, Verschleiß, Ermüdung..)

σ_{zul} zulässige Spannung [N/mm²] im Werkstoff
vom Konstrukteur festgelegt

Diese Formel ist für alle Belastungsarten einsetzbar, nur die Formelzeichen wechseln

1) Ein: Bungeespringen. Welche Größen sind bei der Auswahl des Seiles zu berücksichtigen ? Von rechts nach links durchgehen.

Belastung (Kraft) wird mithilfe der Statik (bzw. Dynamik) näherungsweise ermittelt und ist in schulischen Aufgaben vorgegeben.
Querschnitt S und Werkstoff sind die Freiheiten des Konstrukteurs.
Aus Kraft und Querschnitt ergibt sich die vorhandene Spannung, die immer nur geschätzt ist, denn die folgen Werte sind nicht exakt:
- Die Belastung F oder M F beruht im Wesentlichen auf Annahmen
- Der Querschnitt stimmt bestenfalls zu Beginn des Lebenszyklusses
- Die Formel selbst ist nur eine Annäherung. [Roloff/Matek 1995], S.35: "Aus der Vielzahl der Festigkeitshypothesen haben sich für die Festigkeitsberechnung bewährt ....."
  Hinweis zum Unterschied zw. Mathematik und Technik: In der Mathematik sind einmal gefundene Zusammenhänge „wahr“ im Sinne von überall und ewig gültig. In der Technik beruhen Formeln noch mehr als in den Naturwissenschaften auf Hypothesen, die nur solange gültig sind, bis bessere gefunden wurden.

Die Werkstofffestigkeit wird mit σ_{lim} eingebracht.
Für Grenzspannung ist der Belastungsfall zu beachten (im Abi nur Belastungsfall 1, statische Belastung). Die angegebenen Werte gelten nur für einachsige Spannungszustände, mehrachsige (überlagerte) Spannungen siehe oben.
[EuroTabM] „Festigkeitswerte“, „Werkstoffe“

Die Sicherheitszahl ν ist eine typische Ingenieurslösung: Probleme werden durch Erfahrungswerte gelöst, auch wenn sie noch nicht vollständig verstanden sind. Alle Unwägbarkeiten werden mit der Sicherheitszahl abgedeckt. Sie ist aber kein Freibrief, um eine Konstruktion zu überlasten.
[EuroTabM] „Sicherheitszahlen“
[Roloff/Matek 1995] , S.52]: „Die Höhe der erforderlichen Sicherheit kann für den Anwendungsbereich Maschinenbau allgemein nicht angegeben werden. Es liegt im Ermessensbereich des Konstrukteurs, für jeden Einzelfall nach den zu erwartenden Betriebsbedingungen (Häufigkeit der Höchstlast, Art des Lastkollektivs, Spannungsverhältnis κ u.a.) die Sicherheit eigenverantwortlich festzulegen ...:
- kleinere Sicherheit, wenn die äußeren Kräfte sicher erfasst werden können und ein etwaiger Bruch des betreffenden Bauteils keinen großen Schaden anrichtet und dieser schnell behoben werden kann;
- höhere Sicherheit, wenn äußere Kräfte nicht genau zu erfassen sind und bei einem etwaigen Bruch des betreffenden Bauteils großer Schaden (Lebensgefahr, Betriebsstörungen) entstehen kann.“

FO [Roloff/Matek 1995] S.52: „Eine genaue rechnerische Vorhersage der vorhandenen Bauteilsicherheit kann aufgrund der nur schwer erfassbaren Einflussgrößen, der z.T. recht erheblichen Streuung der Festigkeitswerte und der Vereinfachung im Rechnungsansatz nicht gemacht werden.“
Die Sicherheitszahl kann reduziert werden, z.B. aus Gewichtsgründen im Flugzeugbau: komplexere Rechenmodelle (FEM), mehr Versuche, erhöhter Q-Aufwand, häufigere Wartung, polierte Oberflächen.

Mit dieser Formel können Zug- und Druckspannungen, Flächenpressung und Scherung berechnet werden. Die Frage bleibt nur, welche Spannung, Kraft und Fläche man einsetzen muss.
Formel:und Kennwerte [EuroTabM]„Festigkeitswerte“

AB entwerfen

Zur Übersicht die betrachteten Spannungen, ihre übliche Abkürzungen und Grenzwerte.
Normalspannungen σ, Schubspannungen τ;. Tatsächliche Spannungen erhalten Kleinbuchstaben als Indices, Grenzspannungen Großbuchstaben
Die Indices z und d dienen zur Unterscheidung von Zug- und Druckspannungen.
Flächenpressung ist zwar keine typische Spannung und erhält deshalb einen anderen Buchstaben. Da sie aber wie Spannungen gerechnet wird, wird sie hier aufgenommen.
τ_t und σ_b meinen die maximale Spannung an der Außenfläche des Profils.
Flächenpressung ist die Beanspruchung der Berührungsflächen zweier gegeneinander gedrückter fester Bauteile und heißt bei Nieten auch Lochleibungsdruck. Es ist eigentlich keine innere Spannung und hat deshalb eine andere Abkürzung, wird aber ähnlich berechnet.

Grenzwerte oder Festigkeitskennwerte:
Festigkeit ist die innere Widerstandskraft eines Werkstoffes. Festigkeit ist der Widerstand gegen Verformung oder Bruch.
Grenzspannungen erhalten Großbuchstaben als Indices. Sie gelten nur unter Prüfbedingungen, im wirklichen Leben müssen sie meist reduziert werden (zulässige Grenzspannungen).
Überschreiten von (Fließ-)Grenzen führt zu plastischer Verformung. Überschreiten von Festigkeiten führt zum Bruch.

Übersicht über die Formelgrößen

Spannung	Abk.	Grenzwerte	Ursächliche Kraft	Profilkennwert
Zugspannung	σ, σ_z	Dehngrenze R_e Zugfestigkeit R_m	Zugkraft F_z	Querschnittsfläche S_0
Druckspannung	σ, σ_d	Fließgrenze σ_{dF}	Druckkraft F_d	Querschnittsfläche S_0
(Ab-)Scherspannung	τ_a	Scherfestigkeit τ_{aB}	Querkraft F_a	Querschnittsfläche S_0
Torsionsspannung	τ_t	Torsionsfließgrenze τ_{tF}	Torsionsmoment M_t	polares Widerstandsmoment W_p
Biegespannung	σ_b	Biegefließgrenze σ_{bF}	Biegemoment M_b	axiales Widerstandsmoment W
Flächenpressung	p	zulässige Flächenpressung p_{zul}	Normalkraft F_N	projizierte Fläche A_{proj}
Knickung				

Darstellung Werkstoffkennwerte nach (Rieg 2006)S.130

Beanspruchungen im Einzelnen

Zugfestigkeit

Grenzwerte σ_{lim}

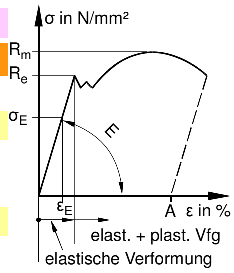
nur Belastungsfall 1

gegen bleibende Verformung

– $\sigma_{lim} = R_e$ bzw. $R_{p0,2}$

gegen Bruch

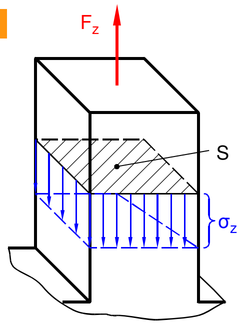
– $\sigma_{lim} = R_m$



Formeln für Zugfestigkeit

$$\frac{R_e / R_{p0,2} / R_m}{\nu} = \sigma_{zzul} > \sigma_z = \frac{F_z}{S}$$

Normalspannung ist gleichmäßig auf dem Querschnitt verteilt.



FTM, MVK, TG:

1) Variante 1: Beanspruchungen als HA in Einzel- oder Partnerarbeit erarbeiten und anschließend im Unterricht vortragen lassen.

Dazu sollen die Vortragenden die Vorgehensweise anhand des TabB erklären und als Beispiel 2 passende Aufgaben aus Hauptprüfungen vorrechnen. Zugspannungen soll von 2 Schülern vorgetragen werden, da hier σ_z , σ_{Zzul} , σ_{lim} erklärt werden muss.

Wdhg: Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, R_m, R_e, $R_{p0,2}$, Kennwerte, Formeln

2) Variante 2: Wiederholung Zugversuch.

[EuroTabM] „Zugversuch"

Für Grenzspannung ist der Belastungsfall zu beachten:

[EuroTabM] „Festigkeitslehre", „Druckspannung"

[EuroTabM] „Festigkeitswerte", „Stähle,..", „Werkstoffe", „Sicherheitszahlen"...

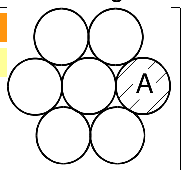
Vertiefung

Im Laufe der Übungen folgende Besonderheiten zeigen:

Mbm: [EuroRBM]
TG: Festigkeit_Ub_Abi
FTM: [Böge Aufg.] 661ff, „Beanspruchung auf Zug"

Sonderfälle

Stahlseil mit Einzeldrähten

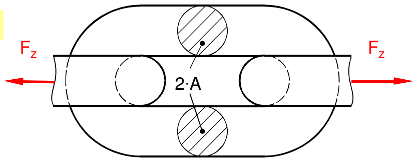


$$\sigma_z = \frac{F_z}{S} = \frac{F_z}{n \cdot A}$$

n: Anzahl der Einzeldrähte

Möglichst gar nicht erst den Gesamtquerschnitt S ausrechnen. Es gibt nämlich Schüler, die aus dem Gesamtquerschnitt einen Gesamtdurchmesser ausrechnen und den dann durch die Anzahl der Drähte teilen.

(Rundglieder-)Kette



$$\sigma_z = \frac{F_z}{S} = \frac{F_z}{2 \cdot A}$$

Heißen auch Gliederkette bzw. Rundstahlkette

Die Erfahrung zeigt, dass Rundgliederketten halten, wenn man die beiden parallelen Querschnitte A dimensioniert.

Das gleiche gilt für Hülsen-, Rollen-, und ähnliche Ketten.

Schrauben (Gewinde)

<u>Festigkeitsklasse→ TabB „Festigkeitsklassen ..."</u>

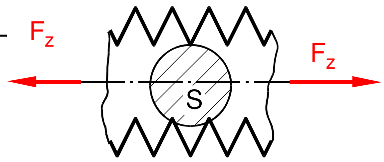
ist im Schraubenkopf eingeprägt. Beispiel: 6.8

$$\rightarrow \quad R_m = 6 \cdot 100 \frac{N}{mm^2} = 600 \frac{N}{mm^2} = 600\, MPa$$

$$\rightarrow \quad R_e = 0{,}8 \cdot R_m = 0{,}8 \cdot 600 \frac{N}{mm^2} = 480 \frac{N}{mm^2} = 480\, MPa$$

<u>Spannungsquerschnitt S</u>

<u>→ TabB „Gewinde"</u>



Der Querschnitt des KernØ des Gewindes ist eine brauchbare Schätzung des Spannungsquerschnitt S. Tatsächlich ist der Spannungsquerschnitt etwas größer, da sich die Täler des Gewindes nicht gegenüberliegen. Da man sowohl für die Schätzung als auch für den korrekten Wert das Tabellenbuch aufschlagen muss, kann man gleich den korrekten Spannungsquerschnitt S nehmen.

Festigkeit_TA_Zug.odt

Druckfestigkeit

Grenzwerte σ_{lim}

nur Belastungsfall 1

gegen bleibende Verformung:

– $\sigma_{dF} \approx R_e$ bzw. $R_{p0,2}$ (Stahl)

gegen Bruch

– $\sigma_{dB} \approx R_m$ (Stahl)

– $\sigma_{dB} \approx 4 \cdot R_m$ (GGL)

Formeln für Druckfestigkeit

$$\frac{\sigma_{dF}}{\nu} = \sigma_{dzul} > \sigma_d = \frac{F_d}{S}$$

Vertiefung

FTM, MVK, TG:

Bilder ähnlich wie im Zugversuch

[EuroTabM] „Festigkeitslehre", „Druckbeanspruchung"

[EuroTabM] „Festigkeitswerte" einschließlich Fußnote

Gusseisen mit Lamallengraphit GJL hat eine sehr hohe Druckfestigkeit. (Eselsbrücke GJL – Guss Jron Lamelle)

Bild / Spannungs-Dehnungsdiagramm von GJL

Kommt kaum vor in Aufgaben, da Knickung das größere Problem ist, aber nicht im Lehrplan steht.

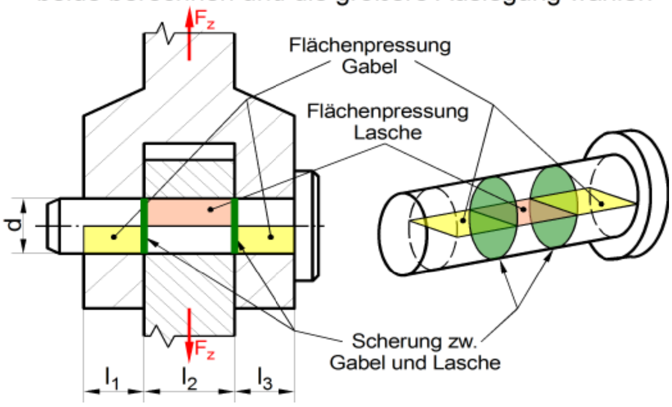
Mbm: [EuroRBM]
TG: -----
FTM: [Böge Aufg.] 714ff, „Beanspruchung auf Druck"

Festigkeit_TA_Druck.odt

Seitenumbruch

Scherung und Flächenpressung

treten oft gemeinsam auf
→ beide berechnen und die größere Auslegung wählen



FTM, MVK, TG:

Scherung und Flächenpressung treten oft meist gemeinsam auf, deshalb muss man eine Konstruktion auf beide Belastungen hin prüfen und auf die größere auslegen. In neueren Abi-Aufgaben wurde dies oft nicht mehr ausdrücklich, wohl aber stillschweigend gefordert. Ein Konstrukteur muss die Flächenpressungen für die innere und äußeren Laschen (innere und äußere Fläche einer Passfeder ..) getrennt untersuchen, aber in Prüfungen genügt es meist, seine diesbezügliche Fähigkeiten an einer Fläche zu demonstrieren. Welche das ist, erfuhr man im Abi bisher im Aufgabentext oder mit der Bemaßung – unbemaßte Elemente kann man nicht berechnen.
Leider ist es auch schon vorgekommen, dass man aus der Bemaßung schließen musste, ob auf Scherung oder Flächenpressung berechnet werden sollte – aber zu einfach soll ein Abi ja auch nicht sein ;-)

Wenn man nicht weiß, welche Fläche gerechnet werden, stelle man die Frage:
Welche Fläche geht kaputt?

Flächenpressung

Grenzwerte

→ [EuroTabM] „Flächenpressung"
<u>zulässige</u> Werte, ohne Sicherheitszahl zu rechnen

Flächenpressung p = „Druck" zwischen festen Berührungsflächen. Da Oberflächen nicht genau plan sind, berühren sich 2 Teile nicht mit ihrer ganzen Fläche und können auch nicht so viel Spannungen übertragen wie innerhalb des Bauteiles.
→ zulässige Flächenpressungen sind deutlich kleiner als zul. Druckspannungen.
Vereinfachend wird angenommen, dass die Flächenpressung gleichmäßig über die projizierte Fläche verteilt ist. Gegenbeispiel Steckstift unter Biegelast: [Decker 2009] S.308f.
Die Kennwerte in [EuroTabM] „Flächenpressung" sind zulässige Werte. Es ist nicht mehr nötig, Sicherheitszahlen zu verwenden.
In [Roloff/Matek 1995] wird auch mit Sicherheitszahl gerechnet. Es scheint sich im [EuroTabM] um eine Vereinfachung zu handeln.

Einabeiten: Verteilung der Flächenpressung in Zapfen lagern, zB. (Böge, Techn. Mechanik)227

Formeln für Flächenpressung

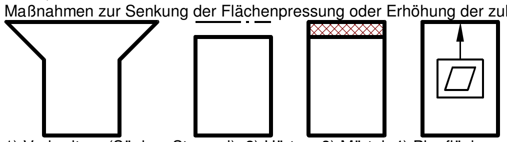
$p_{zul} > p = \frac{F}{A}$, z.B.

– A: Fläche senkrecht zur Kraft (projizierte Fläche)

Im Beispiel: $p_{Lasche} = \frac{F}{b \cdot l_2}$ und $p_{Gabel} = \frac{F}{b \cdot (l_1 + l_3)}$

Fläche wird senkrecht zur Kraftrichtung ermittelt.
- Z.B. Gleitlager: A= d × L
- z.B. Berührungsfläche Gewinde $p = F / (\pi \times d_2 \times H_1) \times (P/m)$
  - m= Mutternhöhe;
  - p/m= Anzahl tragender Gewindegänge

Weitere Darstellungen der projizierten Fläche siehe [EuroTabM] „Flächenpressung"
Im Abi muss bisher nur eine Variante (innen, außen) berechnet werden. Erkenntlich ist dies daran, dass nur eine Variante bemaßt ist.
Maßnahmen zur Senkung der Flächenpressung oder Erhöhung der zul. Flächenpressung



1) Verbreitern (Säulen, Stempel); 2) Härten; 3) Mörtel; 4) Planflächen

Scherfestigkeit und Schneidkräfte

Grenzwerte

→ [EuroTabM] „Festigkeitswerte"
<u>zulässige</u> Werte, ohne Sicherheitszahl zu rechnen
Für Stahl: $\tau_{aB} = 0{,}8 \times R_m$
Für Festigkeit Mindestwerte,
für Schnittkräfte Höchstwerte verwenden!

Gilt vermutlich nur für ungehärteten Stahl. Andere Tabellenbücher verwenden den Wert 0,85. EuroTabM41 gibt Re als Grenzspannung an (außer für zähe Werkstoffe wie Stahl)
[EuroTabM] „Festigkeitswerte", „Stähle..", „Aluminum"..

Formeln für Scherfestigkeit

$\frac{\tau_{aB}}{\nu} = \tau_{azul} > \tau_a = \frac{F}{n \cdot S}$

τ_{aB} : Scherfestigkeit
S: Fläche parallel zur Kraft
n: Anzahl der Scherflächen
z.B. Scherstift z.B. Stanzen

In [EuroTabM] 41 steht erst $\frac{R_e}{\nu} = \tau_{aBmax}$ und dann an zweiter Stelle für zähe Werkstoffe wie Stahl die Formel mit 0,8 x Rm. Dies kann Schüler, die praktisch nur mit Stahl rechnen, in die Irre führen, deshalb lasse ich die erste Formel streichen.

Im Beispiel: $\tau_a = \frac{F}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}$

Auswahl treffen

Konstruktion auf die größere Belastung auslegen.

Normzahlen

[EuroTabM] „Normzahlen"

Vertiefung

Im Laufe der Übungen Besonderheiten zeigen:

- *Mbm: [EuroRBM]*
- *TG: Festigkeit_Ub_Abi*
- *FTM: [Böge Aufg.] 714ff, „Beanspruchung auf Druck und Flächenpressung"; [Böge Aufg.] 738ff, „Beanspruchung auf Abscheren"*

Sonderfälle

Lochleibung

Bolzen in Bohrung, siehe Bild oben
[Duden 2006] bevorzugt die Schreibweise Laibung gegenüber Leibung.

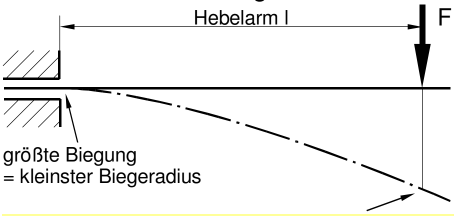
Passfedern

Stanzen

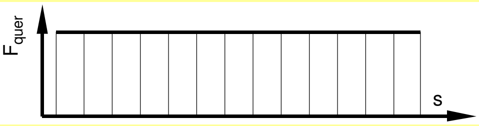
Flyerketten

Biegefestigkeit

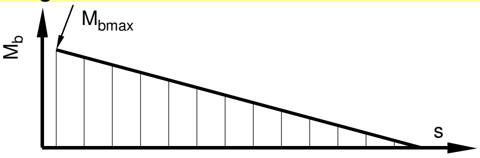
wird bei äußerem Biegemomente $M_b = F \cdot l$ benötigt.



Querkraftverlauf



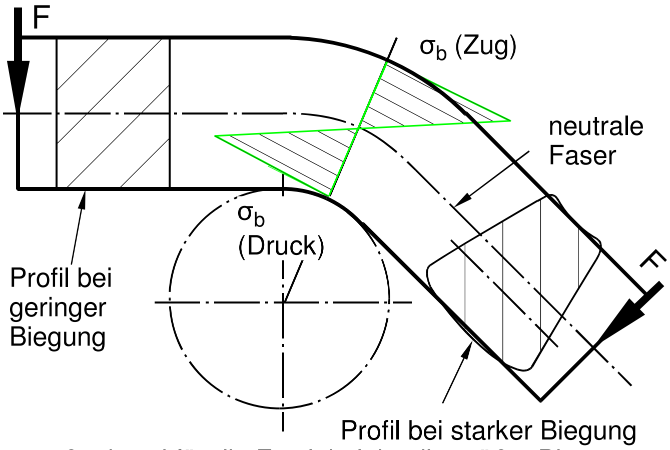
Biegemomentenverlauf



Biegespannung

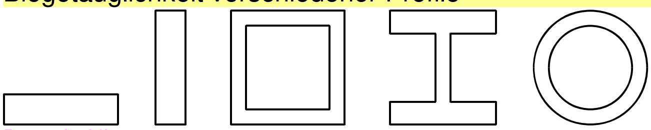
Biegemomente bewirken Verformungen und diese wiederum Spannungen:

Spannungsverlauf im Biegequerschnitt



- maßgebend für die Festigkeit ist die größte Biegespannung σ_b
- Material trägt außen mehr zur Biegefestigkeit bei

Biegetauglichkeit verschiedener Profile



Beschriftung

- Die Kennzahl für Biegetauglichkeit eines Profiles heißt (axiales) Widerstandsmoment W (s.u.)

Festigkeitswerte

- siehe [EuroTabM]
- Biegefließgrenze σ_{bF} > Streckgrenze R_e

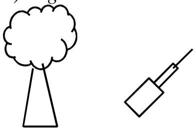
Vertiefung

FTM, MVK, TG:

1) Tafellineal: Ein Ende mit einer Hand fest „einspannen", das andere Ende mit einem Finger biegen? Wo ist das Lineal am stärksten gebogen? Wodurch wird Biegung bewirkt?

Kräfte auf ein Bauteil bewirken Biegemomente, diese biegen das Bauteil. Die Verformung führt zu internen Spannungen.

2) Begründen Sie die Form des Baumstammes und der Angelrute.



Grafiken kleiner

Außen: Zugspannungen σ_Z
Innen: Druckspannungen σ_D
Mitte: neutrale Faser ohne axiale Spannungen

Die neutrale Faser oder Nulllinie wandert bei starker Biegung nach innen, dadurch steigen die Zugspannungen außen noch stärker, sodass der Bruch gewöhnlich außen beginnt.

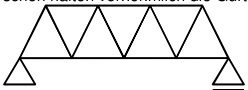
[Haberhauer 2008]: Querschnittsformen, die an der Randfaser eine große Materialanhäufung aufweisen … haben einen einen wesentlich größeren Widerstand gegen Biegung als mittenversteifte Querschnittsformen.

Überschrift

Darstellung:(Haberhauer 2008)S.9ff

3) Bewerten Sie die gezeichneten Profile

Fachwerkbrücken und I-Träger bringen Material in Ober- und Untergurt. Die Streben dazwischen halten vornehmlich die Gurte zusammen.



Die Spannung, bei der unter Biegebelastung die plastische Verformung beginnt, heißt Biegefließgrenze σ_{bF}. Sie ist etwas größer als die Streckgrenze R_e, da beim Biegen die äußeren Atome von den inneren auch dann noch auf Position gehalten werden, wenn R_e schon überschritten ist. [Decker 2009] S.30, Läpple: Einführung in Festigkeitsberechnung]

„Biegeversuche zur Ermittlung von Werkstoffkennwerten haben nur wenig Bedeutung, z.B. für spröde Werkstoffe... Das Biegeverhalten homogener, zäher Werkstoffe lässt sich bis zum Erreichen der Streckgrenze.. hinreichend genau aus den Kennwerten des Zugversuchs abschätzen." [Bargel/Schulze 2005] S.101.]

Visualisierung

FO skythischer Kompositbogen

Begründen Sie die Form einer Blattfeder, Balkenbrücke, eines Baumstammes, einer Angelrute? Warum wird eine (Vogel-)Feder außen dünner ?

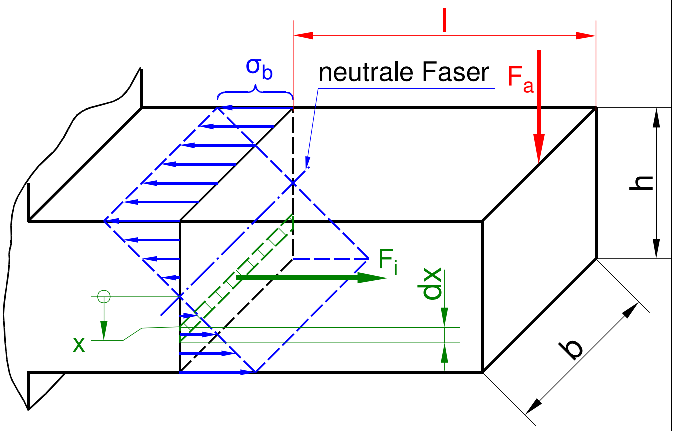
Festigkeit_TA_Biegung.odt

Seitenumbruch

FTM, TG: Herleitung
MVK: überspringen

Biegehauptgleichung

Herleitung für ein Rechteckprofil



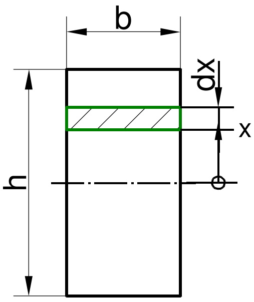
Äußeres Moment $M_b = F_a \cdot l$
Inneres Moment $M_i = F_i \cdot x$
Es muss gelten: äußeres = inneres Moment

$M_b = \Sigma M_i$ oder M_b = Summe aller M_i

(gerade Biegung)

$dA(x) = b \cdot dx$

$\sigma(x) = \sigma_b \cdot \dfrac{x}{h/2}$



$$dF_i(x) = \sigma(x) \cdot dA(x) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot x \cdot dx$$

$$dM_i(x) = x \cdot dF_i(x) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$M_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dM_i(x) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} x^2 \cdot dx = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$M_b = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \frac{h^3}{12} = \sigma_b \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} = \sigma_b \cdot W$$

Biegehauptgleichung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W}$$

(axiales) Widerstandsmoment

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$ (Rechteckprofil)

Formeln für Biegefestigkeit

$$\frac{\sigma_{bF}}{\nu} = \sigma_{bzul} > \sigma_b = \frac{M_b}{W}$$

Axiales Widerstandsmoment W

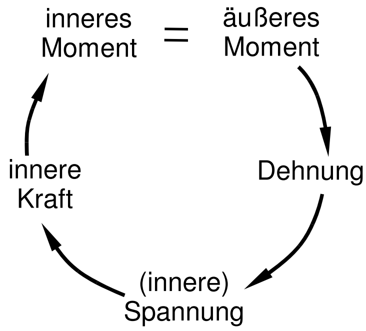
= Maß für den Widerstand eines Profiles gegen Biegung hängt ab von
– Form und
– Maßen des gebogenen Profils und der
– Biegeachse
und wird in der Praxis aus Tabellen entnommen

Vertiefung

σ für Normalspannungen

1) Ein:
Bei der Berechnung der maximalen Biegespannung geht man von kleinen Biegewinkeln (großen Biegeradien) und den folgenden, vereinfachenden Voraussetzungen aus:
– Gerade Biegung heißt, dass sie um eine Hauptachse stattfindet (F_a greift mittig an).
– Das äußere Biegemoment M_b bewirkt einachsige Dehnung / Stauchung senkrecht zum Biegequerschnitt, der Querschnitt wird nicht verändert. Tatsächlich verändert sich der Querschnitt bei größeren Biegungen und die neutrale Faser verschiebt sich nach innen.
– Die Faserschicht, die ihre ursprüngliche Länge beibehält, heißt neutrale Faser (Nulllinie). Das Maß der Dehnung / Stauchung im restlichen Querschnitt hängt aus geometrischen Gründen linear vom Abstand von der neutralen Faser ab.
– Durch die Dehnung entstehen außen Zug- und innen Druckspannungen. Bei Werkstoffen und Belastungen, für die das Hooke'sche Gesetz annähernd gilt, hängen Dehnung und Spannung im elastischen Bereich linear zusammen. Es ergibt sich der skizzierte lineare Verlauf der Normalspannungen senkrecht zum Querschnitt.

Für die Festigkeitsberechnung ist nur die maximale Biegespannung σ_b innen bzw. außen am Biegequerschnitt von Interesse.



2) Kann übersprungen werden.
– Wir betrachten einen schmales Flächenelement, das parallel zur neutralen Faser(-schicht) liegt. Dieser Ansatz ist zweckmäßig, weil dieses Flächenelement einen konstanten Hebelarm zur neutralen Faser und eine konstante Spannung hat.
– Die Größe der Fläche hängt von der Breite b (hier konstant) und dx ab.
– Die Spannung σ im betrachteten Element wird aus der maximalen Biegespannung σ_b an einer Außenseite des Biegequerschnittes abgeleitet, weil nur σ_b für die Festigkeitsberechnung von Interesse ist.
– Die Normalspannungen bewirken in jedem Flächenelement Kräfte F_i, diese bewirken über den Hebelarm zur neutralen Faser innere Biegemomente M_i. Die Summe aller inneren Biegemomente M_i muss dem äußeren Biegemomentes M_b das Gleichgewicht halten.

Die Kraft F_i im Flächenelement ergibt sich aus Spannung und Fläche.

Das innere Biegemoment dM_i aus dem Flächenelement ergibt sich aus Moment = Kraft × Hebelarm. Alle Spannungen sind Normalspannungen senkrecht zum Biegequerschnitt.

– Die Summe aller inneren Biegemomente M_i muss dem äußeren Biegemoment M_b das Gleichgewicht halten.
– Im Übrigen ist das Integral eine weitere Vereinfachung, weil Werkstoffe nicht infinit homogen sind.
– Die maximale Biegespannung σ_b hängt vom Biegemoment M_b und einem Kennwert, dem axialen Widerstandsmoment W, ab.
– Das axiale Widerstandsmoment W ist ein profilspezifischer Flächenkennwert, der die Eigenschaften der Fläche bei Biegung beschreibt. Der Querschnitt einer Fläche ist auch nur ein (sehr bekannter) Kennwert, der zum Beispiel für den Schneidstoffverbrauch beim Durchsägen gebraucht wird. Es gibt weitere Kennwerte für verschiedene Anforderungen.

3) Zwingend
Aus dem Biegemoment und einem Kennwert für das Profil ergibt sich der Betrag der maximalen Biegespannung.
Die Bezeichnung 'axial' ist nicht zwingend erforderlich, dient aber der Unterscheidung zum polaren Widerstandsmoment.

Bisher kannten die Schüler als Kennwert für ein Profil nur die (Querschnitts-)Fläche A, aber es gibt auch andere Kennwerte, die andere Eigenschaften eines Profiles beschreiben:
– (axiales) Widerstandsmoment W, z.B. bei Belastung mit einem Biegemoment.
– polares Widerstandsmoment W_P, z.B. bei Belastung mit einem Torsionsmoment.
– Flächenmoment 0. Grades (Querschnittsfläche A), z.B.bei Zugbelastung.
– Flächenmoment 1. Grades, z.B. bei Drehbeschleunigung, Pirouetteneffekt
– Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment I), z.B. bei Knickung, Durchbiegung

Das axiale Widerstandsmoment hängt von Form und Maßen des gebogenen Profils und von der Biegeachse ab.

[EuroTabM] „Widerstandsmoment“ für geometrisch einfache Querschnitte
[EuroTabM] „Profile“ Widerstandsmomente für handelsübliche Querschnitte
[EuroTabM] „T-Stahl, U-Stahl, Winkelstahl...“ für handelsübliche Formstähle

Kombinationen aus mehreren Profilen

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 835-863 Freiträger mit Einzellasten
TG: Festigkeit_Ub_Abi „Biegefestigkeit“ Aufg. 3.1-3.3

Seitenumbruch

Herleitung für ein Rundprofil

$$dA=2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$\sigma(x)=\sigma_b\cdot\frac{x}{r}$$

$$dF(x)=\sigma(x)\cdot dA(x)=\sigma_b\cdot\frac{x}{r}\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$dM(x)=dF(x)\cdot x=\sigma_b\cdot\frac{x^2}{r}\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$M_b=\frac{2\cdot\sigma_b}{r}\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot x^2\,dx=\frac{2\cdot\sigma_b}{r}\cdot\frac{\pi\, r^4}{8}\Big|_{-r}^{+r}$$

$$M_b=\sigma_b\cdot\frac{\pi\cdot d^3}{32}$$

Herleitung im allgemeinen Fall

$$dA=b(x)\cdot dx \qquad s(x)=x\cdot s_0$$

$$\int dF(x)=\int s(x)\cdot dA(x)=s_0\cdot\int x\cdot dA=0$$

⇒ neutrale Faser = Schwerlinie

neutrale Faser für handelsübliche Formstähle

[EuroTabM]„Widerstandsmoment“

Es ergeben sich die folgenden Änderungen:

Für beliebige Profile und Biegeachsen ist die Breite nicht konstant. Bei unsymmetrischen Profilen muss zunächst die Lage der neutralen Faser bestimmt werden. Dazu wird die Spannung auf die Vergleichsspannung σ_0 im Abstand 1 von der neutralen Faser bezogen.

Zur Bestimmung der Lage der neutralen Faser wird die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma F=0$ angesetzt. Beim Therm $\int dA(x)$ handelt es sich um das Flächenintegral 1.Grades bezüglich der neutralen Faser. Da es gleich null ist, muss die neutrale Faser in der Schwerlinie liegen.

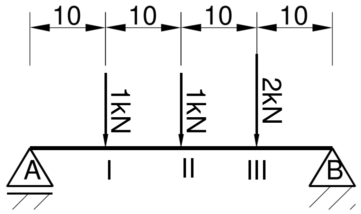
Mit der Lage der neutralen Faser kann das maximale Biegemoment für den Ansatz der Spannung verwendet und die Grenzwerte für das Integral ermittelt werden.

Festigkeit_TA_Biegehauptgleichung.odt

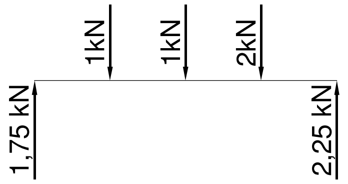
Max. Biegemoment M_{bmax} ermitteln

Grafische Lösung

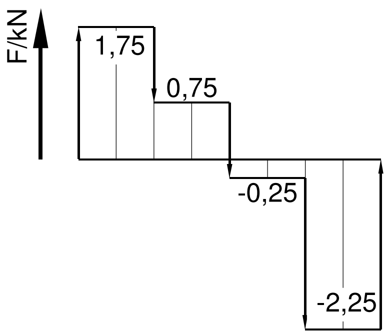
Beispiel 1



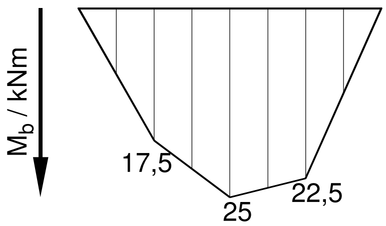
Freimachen (Lageskizze)



Querkraftverlauf



Biegemomentenverlauf



Schlussfolgerungen für TG

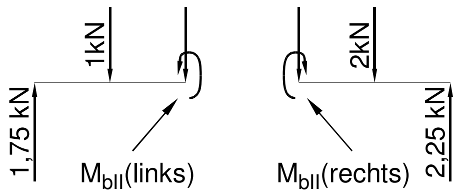
für schultypische Aufgaben mit Punktlasten und konst. Querschnitt des Bauteiles

– M_{bmax} kann nur an einem inneren Krafteinleitungspunkt liegen, wo der Querkraftverlauf die Nulllinie schneidet

Rechnerische Lösung

Freischneiden

an der Stelle II:



Stelle II von links $M_{bII}(li) = -1{,}75\,kN \cdot 20\,m + 1\,kN \cdot 10\,m = -25\,kNm$

Stelle II von rechts $M_{bII}(re) = 2{,}25\,kN \cdot 20\,m - 2\,kN \cdot 10\,m = 25\,kNm$

Stelle I von links $M_{bI} = -1{,}75\,kN \cdot 10\,m = -17{,}5\,kNm$

Stelle III von rechts $M_{bIII} = 2{,}25\,kN \cdot 20\,m = 22{,}5\,kNm$

M_{bmax} = 25kNm (der größte der Beträge)

Einführung mit HP199394-1 Getriebewelle

Auflagerkräfte ermitteln

$$\Sigma M_A = 0 = -1\,kN \cdot 10\text{m} - 1\,kN \cdot 20\text{m} - 2\,kN \cdot 30\text{m} + F_B \cdot 40\,m \rightarrow$$

$$F_B = \frac{10+20+60}{40} kN = 2{,}25\,kN$$

$$\Sigma F_y = F_A - 1\,kN - 1\,kN - 2\,kN + 2{,}25\,kN \rightarrow$$

$$F_A = 1{,}75\,kN$$

oder grafisch per Schlusslinienverfahren

Ermittlung der Eckpunkte

Das Moment M_{II} kann auf M_I aufbauen, das vereinfacht die Rechnung, was ja der Sinn grafischer Lösungen ist. Hinweis: Vor Einführung des Taschenrechner etwa 1970 wurden alle, danach noch sehr viele Bauwerke mit grafischen Methoden berechnet.

$$M_A = 0\,kNm$$

$$M_I = 0\,kNm - 1{,}75\,kN \cdot 10\,m = -17{,}5\,kNm$$

$$M_{II} = -17{,}5\,kNm - 0{,}75\,kN \cdot 10\,m = -25\,kNm$$

$$M_{III} = -25\,kNm + 0{,}25\,kN \cdot 10\,m = -22{,}5\,kNm$$

$$M_B = -22{,}5\,kNm + 2{,}25\,kN \cdot 10\,m = 0$$

Die Berechnung der Biegemomente beginnt hier von links, deshalb ergeben sich mit den üblichen Vorzeichenregeln negative Werte. Von rechts wären sie positiv.

Lösungsmöglichkeiten für M_{bmax}

– M_{bmax} mit Biegemomentenverlauf ermitteln

– Querkraftverlauf zeichnen und M_{bmax} berechnen, wo die Querkraftlinie die Nulllinie kreuzt

– M_b an allen inneren Krafteinleitungspunkten berechnen und M_{bmax} nach Betrag auswählen

Wenn man alle Momente an einem Bauteil berechnet, muss ihre Summe gemäß den Gleichgewichtsbedingungen der Statik Null ergeben oder das Teil ins Rotieren geraten. Das gilt für jedes Teil und jedes Bruchstück davon. Deshalb schneidet man das Teil gedanklich an der untersuchten Stelle auf und betrachtet nur eine Seite (eines der beiden „Bruchstücke").

Links unten sind die Momente an der Stelle II einmal von links und einmal von rechts berechnet. In den Gleichungen entfällt F_{II}=1kN, weil sein Hebelarm 0 ist. Die beiden Momente müssen sich gemäß der Gleichgewichtsbedingung aufheben, und zwar für den ganzen Balken wie in der Statik, als auch für die Bruchstelle selbst, an der eine Seite ein Drehmoment an die andere Seite weitergibt und von dieser wiederum abgestützt wird.

In der Praxis kann man zur Kontrolle beide Seiten rechnen, aber nötig ist es nicht. Es genügt, eines der Momente von der „bequemeren" Seite her zu rechnen. Im Abi sollte man die Kontrollrechnung vermeiden, weil manchmal ungenaue Werte vorgegeben werden, die von links und rechts gerechnet unterschiedliche Biegemomente ergeben, und das kann verwirren. Bei Systemen, die statisch im Gleichgewicht sind, dürfte das nicht vorkommen.

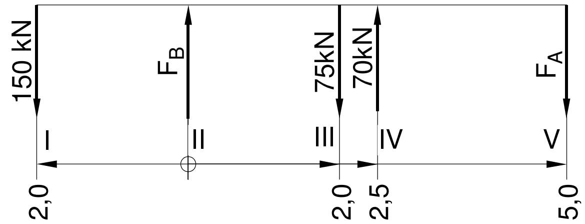
Im Abi keine Kontrollrechnungen für M_b!!

Links stehen die Rechnungen für jeden inneren Krafteinleitungspunkt, an der Stelle II sogar doppelt. Da man diese Rechnungen ohne die obigen Vorbereitungen (außer Lageskizze) durchführen kann, ist dies im Abi der schnellste Weg zu Mbmax. Deshalb

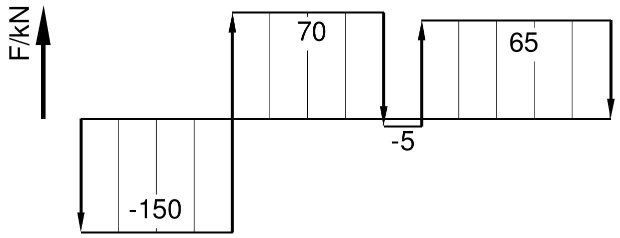
M_{bmax} an inneren Krafteinleitungspunkten suchen.

Beispiel 2

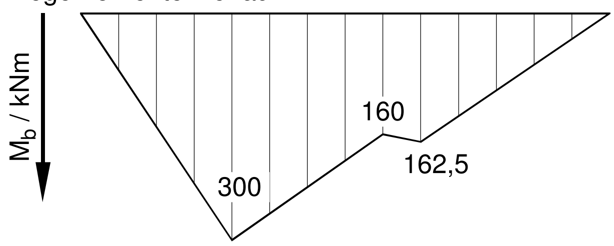
Lageskizze



Querkraftverlauf



Biegemomentenverlauf



Auflagerkräfte ermitteln

$$\Sigma M_{II}=0=+150\,kN\cdot 2\,m-75\,kN\cdot 2\,m+70\,kN\cdot 2{,}50\,m-F_B\cdot 5\,m \quad\Rightarrow$$

$$F_A=\frac{+150\,kN\cdot 2\,m-75\,kN\cdot 2\,m+70\,kN\cdot 2{,}50\,m}{5\,m}=65\,kN$$

$$\Sigma F_y=-150\,kN+F_B-75\,kN+70\,kN-65\,kN \quad\Rightarrow\quad F_B=220\,kN$$

oder grafisch per Schlusslinienverfahren

Ermittlung der Eckpunkte

Von links nach rechts:

$M_I=0\,kNm$

$M_{II}=0\,kNm+150\,kN\cdot 2{,}0\,m=300\,kNm$

$M_{III}=300\,kNm-70\,kN\cdot 2{,}0\,m=160\,kNm$

$M_{IV}=160\,kNm+5\,kN\cdot 0{,}5\,m=162{,}5\,kNm$

$M_V=162{,}5\,kNm-65\,kN\cdot 2{,}5\,m=0$

Vertiefung

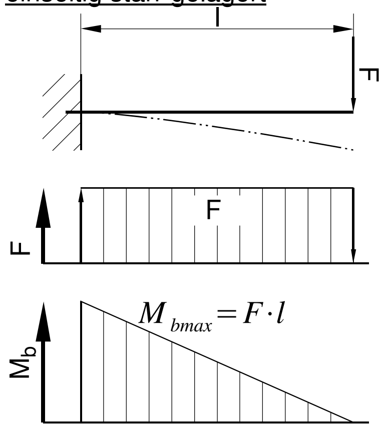
Beispiel HP 1997/98-1 Verladeanlage
TGT: ausdrücklich gefordert in NP2007/08-5 Industrieroboter
Weitere Beispiele: [Haberhauer 2008] S.14,

Formeln im Tabellenbuch: unbrauchbar

– behandeln nur Sonderfälle, z.B. den zentrischen Lastfall
– führen mit der biegesteifen Einspannung in die Irre

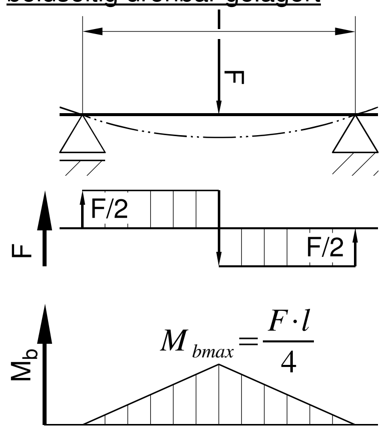
Wenn beidseitig starre Lager nachgeben, biegt sich der Balken in der Mitte stärkerund das Biegemoment wird größer. Der Fall nähert sich der Situation „beidseitig drehbar“, und sollte zur Sicherheit immer angenommen werden. Die elastische Lagerung ist statisch überbestimmt und nur schwer zu berechnen (E-Modul, Temperaturausdehnung, Spannungen, exakte Maße usw.)

einseitig starr gelagert

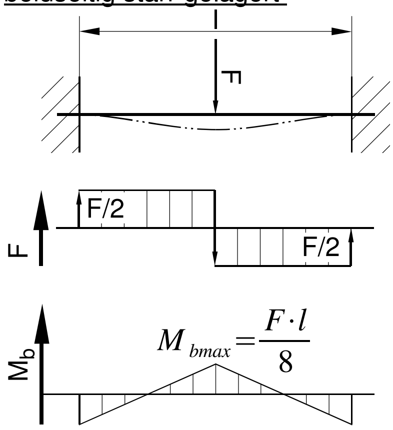


Das maximale Moment wird wg. des max. Hebelarmes im Lager erreicht, nach außen nimmt es linear ab. Elastische Verformung im Lager ändert nichts !

beidseitig drehbar gelagert



beidseitig starr gelagert

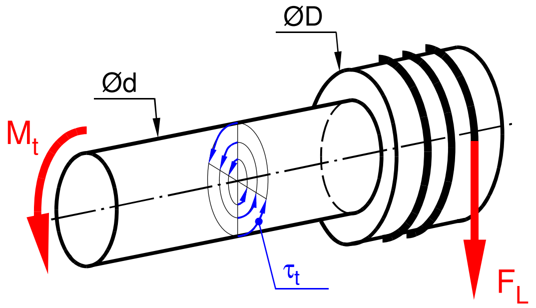


Die Steigung des gebogenen Balkens ist in den Lagern und in der Mitte waagerecht. Aus Symmetriegründen muss dort das Biegemoment gleich sein.

Torsionsspannung

= Spannung durch Verdrehung „in sich“

Typische Aufgabe: Seilwinde



Last F_L erzeugt an der Seiltrommel (ØD) ein Torsionsmoment M_t

$$M_t = F_L \cdot \frac{D}{2}$$

Seiltrommelwelle (Ød) muss M_t aushalten

Torsionshauptgleichung

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p}$$

polares Widerstandsmoment

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad \text{(Rundprofil)}$$

W_p: polares Widerstandsmoment = Kennzahl für die Festigkeit eines Profiles gegen Torsion, wird in der Praxis aus Tabellen entnommen

Formeln für Torsionsfestigkeit

$$\frac{\tau_{tF}}{\nu} = \tau_{tzul} > \tau_t = \frac{M_t}{W_p}$$

τ_{tF}:

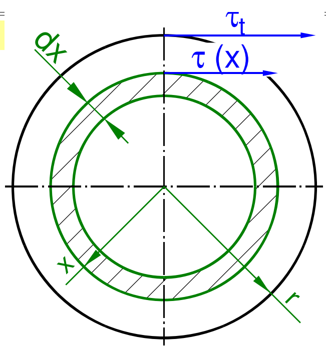
τ_{tzul}:

τ_t:

Vertiefung

Herleitung

<u>für ein Rundprofil</u>



Kreisringfläche

$$dA(x) = 2\pi \cdot x \cdot dx$$

Spannung im Kreisring

$$\tau(x) = \tau_t \cdot \frac{x}{r}$$

$$dF(x) = \tau(x) \cdot dA(x) = \tau_t \cdot 2\frac{\pi}{r} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$dM = x \cdot dF(x) = \tau_t \cdot 2\frac{\pi}{r} \cdot x^3\, dx$$

$$M_t = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r} \cdot \int_0^r x^3 \cdot dx = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{r^4}{4} = \tau_t \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{2} = \tau_t \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

<u>für ein Rohrprofil</u>

$$M_t = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r_a} \cdot \int_{r_i}^{r_a} x^3 \cdot dx = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r_a} \cdot \frac{r_a^4 - r_i^4}{4} = \tau_t \cdot \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$$

FTM, MVK, TG: bis Formeln für Torsionsfestigkeit.

1) Analogien zur Biegespannung nutzen und Torsionsspannung schnell erklären. Herleitung der Torsionshauptgleichung nur bei viel Zeit.

2)

- τ für Schubspannungen
- Als Torsionsspannung τ_t bezeichnet man die innerhalb der Spannungsverteilung maximale Torsionsspannung an der Oberfläche, die auch zum Bruch führt.
- Die Spannung verläuft im Innern theoretisch im Kreis. Tatsächlich gibt es Schubspannung, die zum typischen Torsionsbruch mit einer wendelförmigen Bruchfläche führt.

AM Kreide bis zum Bruch verdrehen

Erklärung Schubspannung bei Torsion

Die maximale Torsionsspannung τ_t hängt vom Torsionsmoment M_t und einem profilspezifischem Kennwert, dem polaren Widerstandsmoment W_p, ab.
Aus dem Torsionsmoment und einem Kennwert für das Profil ergibt sich der Betrag der maximalen Torsionsspannung.
Das axiale Widerstandsmoment hängt von Form und Maßen des tordierten Profils ab.
„Tordieren“ steht nicht im Duden, ist aber in der Technik gebräuchlich (z.B. [Böge, Techn. Mechanik])..

[EuroTabM] „Widerstandsmoment“ für einfache Querschnitte

[EuroTabM] „Winkelstähle...“, „T-Stahl“, „Hohlprofile“ enthält Widerstandsmoment für handelsübliche Formstähle

Verdrehwinkel

(Nur zur Info für Aufgaben im [Böge Aufg.]

$$\varphi^o = \frac{\tau_t \cdot l}{G \cdot d} \cdot \frac{360°}{\pi} = \frac{M_t \cdot l}{W_p \cdot G \cdot d} \cdot \frac{360°}{\pi} \quad \text{mit}$$

- l, d: Länge und Ø der verdrehten Welle
- G: Gleitmodul des Werkstoffes (vgl. E-Modul), G(Stahl) = 80 kN/mm²

TG: Festigkeit_Ub_Abi.odt

FTM: [Böge Aufg.] S.809ff
815ff: Aufgaben mit Verdrehwinkel auslassen
826 Lösung durch Ausprobieren
831: kombinierte Aufgaben

TG: Nur auf Nachfrage

Bei der Berechnung der maximalen Torsionsspannung geht man von kleinen Torsionswinkeln und den folgenden Voraussetzungen aus:

- Das äußere Torsionsmoment M_t bewirkt einachsige Dehnung, der Querschnitt wird nicht verändert. Tatsächlich? Das Torsionsmoment wirke genau um die Stabachse.
- Durch die Dehnung entstehen Schubspannungen. Bei Werkstoffen und Belastungen, für die das Hooke'sche Gesetz annähernd gilt, hängen Dehnung und Spannung im elastischen Bereich linear zusammen. Es ergibt sich der skizzierte lineare Verlauf der Schubspannungen parallel zum Querschnitt.

Wir betrachten einen schmales kreisförmiges zentrisches Flächenelement. Dieser Ansatz ist zweckmäßig, weil darin Hebelarm und Spannung konstant sind. Die Fläche wird nicht mit der Kreisringformel, sondern mit Umfang mal dx berechnet. Dies ist korrekt, weil dx sehr klein ist.

Die Spannung τ im betrachteten Element wird auf die maximale Torsionsspannung σ_t an der Oberfläche des Profils bezogen, weil nur diese für die Festigkeitsberechnung interessiert.

Die Schubspannungen bewirken in jedem Flächenelement Kräfte. Die Kraft F im Flächenelement ergibt sich aus Spannung und Fläche.

Die Kräfte bewirken über den Hebelarm zum Mittelpunkt innere Torsionsmomente M. Das innere Torsionsmoment dM aus dem Flächenelement ergibt sich aus Moment = Kraft × Hebelarm. Alle Schubspannungen verlaufen tangential.

Die Summe aller inneren Torsionsmomente M muss dem äußeren Torsionsmoment M_t das Gleichgewicht halten.

Das Rohrprofil wird wie das Rundprofil (voll) berechnet, nur die Grenzen des Integral reichen vom inneren bis zum äußeren Radius (r_i, r_a) bzw. Durchmesser (d, D)

FTM, MVK, TG: Hintergrundinfo, nicht unterrichten

Übertragung der Kennwerte aus dem Zugversuch auf andere Belastungen

Einarbeiten:(Decker 2009)

1) Welches sind die 6 wichtigsten Belastungsarten ? oder Mit welchen Methoden kann eine Kreide zerstört werden ?

Belastungsarten

Durchsprechen anhand

EuroTabM39 S.45 „Festigkeitslehre“

Zugbeanspruchung

Druckbeanspruchung

für viele Metalle ist die Zug- und Druckkurve annähernd symmetrisch.

Zähe Werkstoffe: Quetschgrenze σ_{dF} ist so groß wie Re.
Spröde Werkstoffe: Druckfestigkeit σ_{dB}
Gegenbeispiele: Gusseisen, Beton, Keramik (druck-, aber nicht zugfest), Seile

(Flächenpressung)

entspricht Druck zwischen festen Grenzflächen und hat eigene Kennwerte.

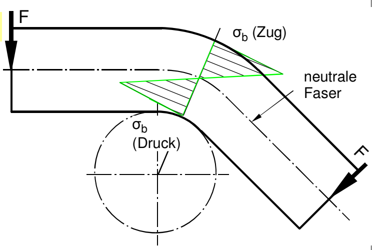
Die maximale zulässige Flächenpressung ist kleiner als die maximale Druckspannung, weil sich die Oberfläche nicht vollständig anschmiegt. Dies ist auch der Unterschied zum Druck. Ist keine klassische Spannung, wird aber ähnlich gerechnet.

Abscherung

für viele Werkstoffe wird die Zugfestigkeit mit dem Faktor 0,8 umgerechnet.

Biegespannung

– kann direkt in Zug- und Druckspannung erklärt werden.



AM gebogener Vierkant

Integral der Spannung mal Hebelarm und Flächenelement gleicht das Biegemoment aus.

Torsionsbeanspruchung

– wird theoretisch durch Zugspannung erklärt und gerechnet.
– Der Bruchverlauf zeigt aber, dass es sich um mehrachsige Spannungszustände handelt. Deshalb werden i.d.R. eigene Grenzwerte verwendet.

AM gebogener Vierkant

Integral der Spannung mal Hebelarm und Flächenelement gleicht das Biegemoment aus.

Belastungsfall

dynamische, mehrachsige oder andere unüberschaubare Belastungen werden mit der Sicherheitszahl abgedeckt.
zulässige Belastung = Werkstoffkennwert / Sicherheit

Entwickeln anhand

EuroTabM39 S.43

anschließend Philosophie des Ingenieurs darstellen:

Probleme, die theoretisch noch nicht gelöst sind, werden durch Erfahrungswerte pragmatisch gelöst. Dies ergibt nicht unbedingt die optimale Konstruktion, aber es ergibt immerhin eine funktionierende Konstruktion, bis wer auch immer eine bessere Lösung gefunden hat.

Abhängig von

– Belastungsfall
– Komplexität der Beanspruchung
– möglicher Schaden
– Wartung
– gesetzlichen Vorschriften
– .....

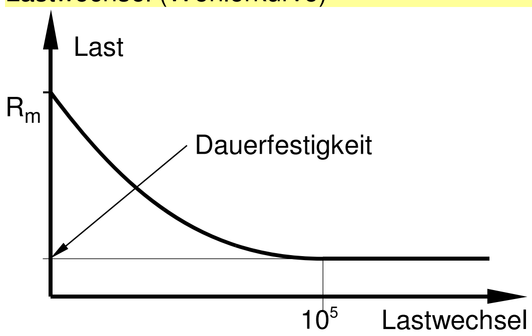
Andere Beispiele für Faktoren

- Kerbwirkungszahl
- Oberflächenbeiwert
- Größenbeiwert

EuroTabM39 S49 „Festigkeistlehre“

Lastwechsel (Wöhlerkurve)

Dauerschwingversuch nach DIN 50100.



Dynamik

Kinematik (Bewegungslehre)

= Beschreibung der Ortsveränderung von Körpern bzw. Körperpunkten

1) Wir beginnen mit etwas, was fast jeder hier kann: Autofahren. Wozu fährt man Auto – falsche Frage: wozu dient ein einfaches Fahrzeug?
In der Kinematik spielen Kräfte noch keine Rolle

Größen

Basisgrößen

Weg(abschnitt)	Δl, Δs	[m]
Zeit(abschnitt)	Δt	[s]

Eine Basisgröße kann nicht durch andere Basisgrößen ausgedrückt werden, auch wenn die praktischen Definitionen diesen Eindruck entstehen lassen (das Meter ist zur Zeit als Lichtgeschwindigkeit im Vakuum / 299.792.458 Sekunde definiert).
Basisgrößen des SI-Systems [Einheit] sind: Länge l [m], Masse m [kg], Zeit [s], Stromstärke I [A], Thermodynamische Temperatur T [K], Stoffmenge n [Mol], Lichtstärke I_v [cd].
Definitionen der Einheiten siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem.
Im SI-System (Système Internationale d'Unités) gilt für die Länge das Größensymbol l, aber in Aufgabensammlungen und Tabellenbüchern wird oft noch s verwendet. ([EuroTabM] „Einheiten im Messwesen", „Geschwindigkeit")

abgeleitete Größen

Geschwindigkeit

v in $[m/s]$ = Änderung des Weges pro Zeit

Beschleunigung

a in $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ = Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit

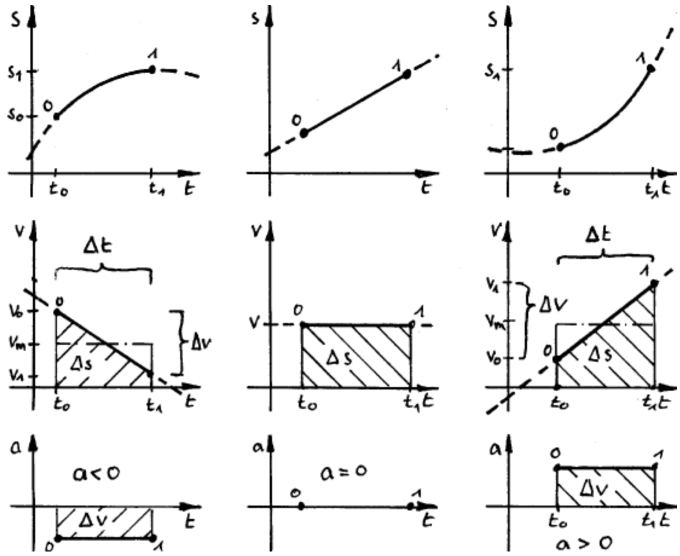
Beschleunigung meint jede Änderung der Geschwindigkeit in Betrag und/oder Richtung, also Beschleunigung (Umgangssprachlich), Verzögerung und Richtungsänderung. Man kann dies am Beispiel verdeutlichen: Wie übt man durch Autofahren Kräfte auf die Mitfahrer aus? Beschleunigen, Bremsen, Kurve fahren

$$1\frac{km}{h}=\frac{1000\,m}{3600\,s}=\frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s}$$

$$1\frac{m}{s}=\frac{\frac{km}{1000}}{\frac{h}{3600}}=\frac{km}{1000}\cdot\frac{3600}{h}=3{,}6\frac{km}{h}$$

Bewegungszustände

a < 0 | a = 0 | a > 0



1) Hinweise zum Zeichnen von Diagrammen: Achsenbeschriftung, Einheiten mangels Skalen verzichtbar
2) Wdhg: Beschleunigung ist Geschwindigkeitsänderung

gleichförmige Bewegung ($v=konst.,\ a=0$)

Geschwindigkeit ändert sich nicht:: konstante Autofahrt, Vorschubbewegung bei Werkzeugmaschinen.

s,t-Diagramm (a=0)

1) Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (Autofahrt mit 100km/h). Wie kann man die Veränderung des Weges über der Zeit grafisch darstellen?
s,t-Diagramm
2) Kann man im Diagramm die Geschwindigkeit erkennen?
Steigung der Kurve
3) Wie kann man die Geschwindigkeit berechnen?
s0, s1, t0, t1 eintragen,
Streckenänderung und Zeitänderung feststellen und ins Verhältnis setzen $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}\quad\left[\frac{m}{s}\right]$

v,t-Diagramm (a = 0)

4) Wie kann man eine konstante Geschwindigkeit grafisch darstellen?
5) Kann man im v,t.-Diagramm die Strecke erkennen?

$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}\ \rightarrow\ \Delta s=v\cdot\Delta t$ Rechteckfläche!

v,t-Diagramm (a = 0)

6) Wie groß ist die Beschleunigung, grafische Darstellung?

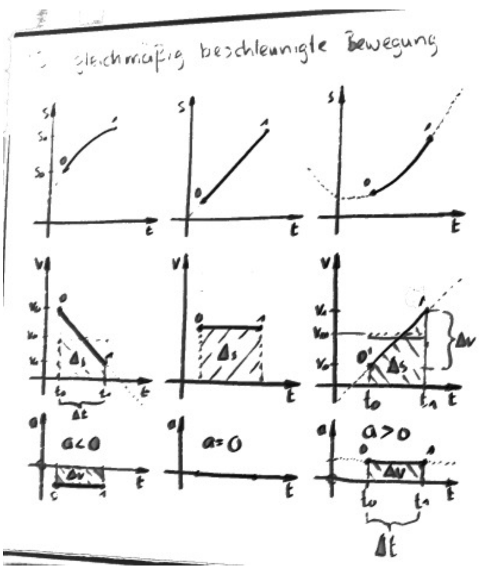
gleichmäßig beschleunigte Bewegung

a <>0

1) a > 0 von „unten her" aufbauen:
- Erst a,t-Diagramm, dann Analogieschluss auf das v,t-Diagramm: a = Δv / t
- bei v <> const.: . $v_m=\frac{v_0+v_1}{2}$

2) a < 0 zeichnen lassen
[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 400-404, Musteraufgaben S.118

Vertiefung



Gleichungen

I Beschleunigung = $\frac{\text{Geschwindigkeitsänderung}}{\text{Zeitabschnitt}}$

$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0}\ \left[\frac{m}{s^2}\right] \leftrightarrow \Delta v = a\cdot\Delta t$

↳ Fläche im a,t-Diagramm

II Geschwindigkeit = $\frac{\text{Weg(-änderung)}}{\text{Zeitabschnitt}}$

$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}\ \left[\frac{m}{s}\right] \leftrightarrow \Delta s = v_m\,\Delta t=\frac{v_1+v_0}{2}\,\Delta t$

III $\Delta s=\frac{v_1+v_0}{2}\cdot\frac{v_1-v_0}{a}=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a}$

IV $\Delta s=\frac{1}{2}a\,\Delta t^2+v_0\,\Delta t$

$\Delta s=-\frac{1}{2}a\,\Delta t^2+v_1\,\Delta t$

07.10.2009 13:56

Seitenumbruch

Gleichungen für Bewegungen

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 417-432

I) $Geschwindigkeit = \frac{Wegänderung}{Zeitabschnitt}$

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \quad \left[\frac{m}{s}\right]}$$

II) $Beschleunigung = \frac{Geschwindigkeitsänderung}{Zeitabschnitt}$

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]}$$

Überlegungen zu den Grundgleichungen

beteiligte Größen insgesamt

a, s, t: 3 unabhängige Größen
v_0, v_1: 2 unabhängige Größen
(in [EuroTabM] leicht zu verwechseln)
insgesamt: 5 Größen

beteiligte Größen in einer Gleichung

$a = \frac{t_1 - t_0}{\Delta t}$ $\qquad v_m: \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

enthalten je 4 Größen, davon eine gesuchte Größe

Schlussfolgerungen

- Wenn man 3 Größen kennt, kann man die 4. Größe berechnen
- Die 5. Größe kann unbeteiligt bleiben oder berechnet werden.

Vertiefung

Musteraufgaben-Arbeitsplan

1. v,t – Diagramm skizzieren
2. Grundgleichungen hinschreiben
3. Von den 5 Grundgrößen Δs, Δt, a, v_0 und v_1 müssen 3 gegeben sein.
4. Wenn die gesuchte Größe nicht mit einer Grundgleichung gelöst werden kann, löst man sie nach den unbeteiligten (weder gegeben noch gesucht) Größe auf und setzt die beiden gleich.

Gedanke:
Technikerschüler kämpfen zu Beginn ihrer Ausbildung noch mit mathematischen Grundregeln, deshalb sollte man hier ausführlich vorgehen. Außerdem ist die Arbeit mit den Formeln aus Formelsammlung fehlerträchtig und fördert kaum Verständnis.
Deshalb werden hier alle Formeln für die Kinematik anhand entsprechender Aufgaben hergeleitet um die Arbeit mit Formeln zu üben.

1)2) Fläche im v,t-Diagramm ist ein Trapez. Formel?

Die Übereinstimmung zur Schreibweise aus [EuroTabM] lässt sich für $v_0 = 0$ oder $v_1 = 0$ zeigen, indem man die Formelzeichen abdeckt. $\Delta s = \frac{1}{2} \cdot v \cdot t$

Für die Flächen wird allgemein das Formelzeichen A und für Querschnittsflächen S verwendet. Hier sollte man S schon wegen der Verwechslung mit dem Weg s nicht einsetzen.

Formel → ([EuroTabM] „Einheiten im Messwesen", „Geschwindigkeit"))

3) Vergleiche: Beschleunigung eines PKW von 0 auf 100 km/h in 5 s:

$$a = \frac{v_t - v_0}{\Delta t} = \frac{(100-0)\frac{km}{h}}{5s} = \frac{100000\,m}{3600\,s \cdot 5s} = 5{,}56\frac{m}{s^2}$$

Merke: auch hoch motorisierte Fahrzeuge beschleunigen im freien Fall am schnellsten:

4) Wieviele Größen stecken in den Glchg. I und II ? TA Zeile 3 (ges:)

- In der Schreibweise mit a, Δv, Δt bzw. v_m, Δs, Δt sind es 5 Größen mit nur einer Überschneidung zwischen den Formel → ungeschickt.
- In der Schreibweise mit a, v_0, v_1, Δt bzw. v_0, v_1, Δs, Δt sind es auch 5 Größen, aber mit 3 Überschneidungen → besser geeignet.

5) Für v_0, v_1 geht auch v_0, Δv bzw. v_m, v_1 usw. Umrechnungen?

- Wenn man zwei Angaben über die Geschwindigkeit kennt, kann man die anderen berechnen.

TA Zeile 1,4, Herleitungen

6) Wie viele Größen sind in einer Gleichung beteiligt? Schlussfolg.?

- In den Grundgleichung sind mit a, v_0, v_1, Δt bzw. v_0, v_1, Δs, Δt je 4 Größen beteiligt, von denen 1 Größe gesucht wird. Die 5. Größe ist unbeteiligt.

7) Schlussfolgerung?
Die Geschwindigkeit taucht zwar in 4 Größen auf, unabhängig sind aber nur 2: . v_0, v_1.

1) Übersicht über die Gleichungen ausfüllen

- Jede Aufgabe wird zunächst untersucht, zu welches Tabellenfeld sie gehört. Wenn die Formel dazu noch nicht vorhanden ist, wird sie bei der Lösung der Aufgabe hergeleitet und in die Tabelle eingetragen. Nach und nach ergibt sich so eine vollständige Formelsammlung.

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 417-443
[Böge, Techn. Mechanik], Musteraufgaben S.150ff
Probleme in KA

Seitenumbruch

Formelsammlung lineare Bewegungen

Beispiele aus [Böge Aufg.]		3 unabhängige Größen			2 unabhängige Größen			
	gesucht →	a) Beschleunigung a	b) Weg Δs	c) Zeit Δt	d) Anfangsgeschw. v_0	e) Endgeschw. v_1	f) Durchschnittsg. v_m	g) G.-Differenz Δv
	unbeteiligt ↓		$\Delta s = s_1 - s_0$		$v_0 = v_1 - \Delta v$ $v_0 = 2 \cdot v_m - v_1$	$v_1 = v_0 + \Delta v$ $v_1 = 2 \cdot v_m - v_0$	$v_m = \frac{v_1 + v_0}{2}$	$\Delta v = v_1 - v_0$
I)	a	Zeile ↔ ohne a Spalte ↕ für a	411, 414a, 417, 428b $\Delta s = \Delta t \cdot v_m = \Delta t \cdot \frac{v_1 + v_0}{2}$	409b $\Delta t = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{2 \cdot \Delta s}{v_1 + v_0}$	$v_0 = 2 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} - v_1$	424a $v_1 = 2 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} - v_0$	Grundgleichung 1 $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	
II)	Δs	419 Grundgleichung 2 $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	Zeile ↔ ohne Δs Spalte ↕ für Δs	422, 425, 428a $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_1 - v_0}{a}$	420a $v_0 = v_1 - a \cdot \Delta t$	$v_1 = v_0 + a \cdot \Delta t$		420a $\Delta v = a \cdot \Delta t$
III)	Δt	423 $a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2 \Delta s}$	421, 425b $\Delta s = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$	Zeile ↔ ohne Δt Spalte ↕ für Δt	421 $v_0 = \pm\sqrt{v_1^2 - 2a \cdot \Delta s}$	427a $v_1 = \pm\sqrt{v_0^2 + 2a \cdot \Delta s}$		
IV)	v_0	$a = +2 \cdot \frac{v_1}{\Delta t} - 2 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t^2}$	420b $\Delta s = v_1 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$	$\Delta t_{a,b} = +\frac{v_1}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 - \frac{2 \Delta s}{a}}$	Zeile ↔ ohne v_0 Spalte ↕ für v_0	431a $v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t$		
V)	v_1	424b $a = 2 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t^2} - 2 \cdot \frac{v_0}{\Delta t}$	426c $\Delta s = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$	426c, 427b $\Delta t_{a,b} = -\frac{v_0}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 + \frac{2 \Delta s}{a}}$	431b $v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t} - \frac{1}{2} a \cdot \Delta t$	Zeile ↔ ohne v_1 Spalte ↕ für v_1		

Seitenumbruch

Herleitungen für die Formelsammlung

Direkt aus einer Grundgleichung

1f	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
407	0	92m	138s				?

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1)$$

1c	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
409	0	3,75m	?				1m/12m

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=\frac{\Delta s}{v_m} \quad (1c)$$

1d	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
411	0	?	20µs				300000m/s

1c: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta s=\Delta t\cdot v_m \quad (1d)$$

Vertiefungen

1d), 1e), 1g)

2a	a	Δs	Δt	v_0	v_1		
419	?	-	0,5s	18 m/s	-18 m/s		

2a: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

2g, 2d	a	Δs	Δt	v_0	v_1		
420a	-3,3 m/s²	-	8,8s	?	0		

2a: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v=a\cdot\Delta t \quad (2g)$$

2g: $$v_1-v_0=\cancel{\Delta v}=a\cdot\Delta t \rightarrow v_0=v_1-a\cdot\Delta t \quad (2d)$$

Mit beiden Grundgleichungen

4b	a	Δs	Δt	v_0	v_1		
420b	-3,3m/s²	?	8,8s	-	0		

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2} \rightarrow v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1 \quad (1d)$$

2: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t} \rightarrow v_0=v_1-a\cdot\Delta t \quad (2d)$$

1d=2d $$2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1=\cancel{v_0}=v_1-a\cdot\Delta t \rightarrow$$

$$\Delta s=v_1\cdot\Delta t-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t^2 \quad (4b)$$

3b, 3d	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
421	-9,81m/s²	30m	-	?	0		

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=\frac{\Delta s}{v_m}=\frac{2\cdot\Delta s}{v_1+v_0} \quad (1c)$$

2: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=\frac{\Delta v}{a}=\frac{v_1-v_0}{a} \quad (2c)$$

1c=2c $$\frac{2\cdot\Delta s}{v_1+v_0}=\Delta t=\frac{v_1-v_0}{a} \rightarrow \Delta s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a} \quad (3b)$$

3b: $$\Delta s=\frac{v_1^2-v_0^2}{2a} \rightarrow v_0=\pm\sqrt{v_1^2-2a\cdot\Delta s} \quad (3d)$$

2c	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
422	0,18m/s²	-	?	0	70 km/h = 19,4 m/s		

2: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta t_{01}=\frac{\Delta v}{a}=\frac{v_1-v_0}{a} \quad (2c)$$

Umbau auf die Systematik und Schreibweise in den Lösungen

In dieser Phase noch sehr ausführlich umformen: │·Δt; │:Δs ...

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben:
- 407: v, einfach, Umrechnung m/s ↔ m/min
- 405: Vertiefung Einheiten umrechnen
- 409a: Wdhg v, Ültg t

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben:
- 409b: gesucht: t
- 418

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben:
- 411: gesucht: s; neue Größenordnung
- 414a: gesucht: s;
- 417

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben:
- 410; 412; 413; 414: Volumenströme durch Querschnitte,
- 415, 416: Überholvorgänge als Anwendung für v,t-Diagramm

1) *Warum gibt es hier noch keine Aufgaben für die Felder 1d, 1e und 1g?*

Die Aufgaben bis 417 sind noch ohne Beschleunigung, da gilt $v_0 = v_1 = v_m$ und diesbezügliche Aufgaben wären nicht spannend.

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben:
- 419:

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben: 420a:

2) *Aufgaben nacheinander rechnen, neue Formeln in die Formelsammlung übernehmen.*

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben:
- 420b: Wenn man eine eine Größe nicht unmittelbar aus den beiden Grundgleichungen für Bewegungen heraus berechnen kann, muss man beide Gleichungen verwendet. Geschickt ist es, wenn man beide Gleichungen nach der nicht beteiligten Größe, hier v0, auflöst, dann gleichsetzt und nach der gesuchten Größe umformt:

Aufgaben:
- 421: Lösung wie oben

Auch hier gilt die Schreibweise aus [EuroTabM] nur für $v_0 = 0$ oder $v_1 = 0$. Das negative Vorzeichen bei $v_1 = 0$ tritt nur bei bei Verzögerung (a < 0) und fällt dann wieder heraus. Deshalb rechnen Techniker oft in Beträgen. $\Delta s=\frac{v^2}{2\cdot a}$

Die Schreibweise Δs_{01} bedeutet Änderung der Strecke zwischen den Punkten 0 und 1 und soll Verwechslungen bei komplexeren Aufgaben vermeiden.

Hinweis: $v_1+v_0\cdot v_1-v_0=v_1^2-v_0^2$

3a	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
423	?	0,5m	-	3,6km/h = 1 m/s	0		

1c=2c $$\frac{2\cdot\Delta s}{v_1+v_0}=\Delta t=\frac{v_1-v_0}{a} \rightarrow a=\frac{v_1^2-v_0^2}{2\cdot\Delta s} \quad (3a)$$

1e	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
424a	-	5m	2,5s	11,4km/h 3,17m/s	?		

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2} \rightarrow v_1=\frac{2\cdot\Delta s_{01}}{\Delta t}-v_0 \quad (1e)$$

5a	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
424b	?	5m	2,5s	11,4km/h = 3,17m/s	-		

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2} \rightarrow v_1=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_0 \quad (1e)$$

2: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t} \rightarrow v_1=v_0+a\cdot\Delta t \quad (2e)$$

1e=2e $$v_1=\frac{2\cdot\Delta s_{01}}{\Delta t}-v_0=v_0+a\cdot\Delta t \rightarrow$$

$$a=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t^2}-2\cdot\frac{v_0}{\Delta t} \quad (5a)$$

4e	a	Δs	Δt	v0	v1	Δv	v_m
431a	-9,81m/s²	28m	1,5s	-	?		

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2} \rightarrow v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1 \quad (1d)$$

2: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t} \rightarrow v_0=v_1-a\cdot\Delta t \quad (2d)$$

1d=2d $$v_0=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_1=v_1-a\cdot\Delta t \rightarrow$$

$$v_1=\frac{\Delta s}{\Delta t}+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t \quad (4e)$$

5b, 5c	a	Δs	Δt	v_0	v_1	Δv	v_m
426c	-9,81 m/s	10000m	?	1200 m/s	-		

1e=2e: $$v_1=\frac{2\cdot\Delta s}{\Delta t}-v_0=v_0+a\cdot\Delta t \rightarrow$$

$$\Delta s=+v_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}\cdot a\cdot\Delta t^2 \quad (5b)$$

Quadratische Gleichung in die Form 0 = Δt² + .. bringen:

$$0=\Delta t^2+\frac{2\cdot v_0}{a}\cdot\Delta t-\frac{2}{a}\cdot\Delta s$$

Mit der allg. Lösung für quadratische Gleichungen

$$0=x^2+p\cdot x+q \rightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

wird:

$$\Delta t=\frac{-v_0}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{v_0}{a}\right)^2-\left(\frac{-2\cdot\Delta s}{a}\right)} \quad (5c)$$

Oft ist eine der mathematisch möglichen Lösungen technisch nicht sinnvoll, aber in dieser Aufgabe sind beide Lösungen richtig, da der Köper die Höhe 2x passiert.

5d	a	Δs	Δt	v0	v1	Δv	vm
424b	-9,81m/s²	28m	1,5s	?	-		

1: $$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v_1+v_0}{2} \rightarrow v_1=2\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}-v_0 \quad (1f)$$

2: $$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{\Delta t} \rightarrow v_1=v_0+a\cdot\Delta t \quad (2f)$$

1f=2f: $$v_1=\frac{2\cdot\Delta s_{01}}{\Delta t}-v_0=v_0+a\cdot\Delta t \rightarrow$$

$$v_0=\frac{\Delta s}{\Delta t}-\frac{1}{2}a\cdot\Delta t \quad (5a)$$

Ohne Aufgabe

$$\Delta t_{01}=\frac{+v_1}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{v_1}{a}\right)^2-\left(\frac{2\cdot\Delta s_{02}}{a}\right)} \quad (4c)$$

Mehrere Bewegungen

= aufeinanderfolgende Bewegungen eines Körpers oder parallele Bewegungen mehrerer Körper

Lösungshinweise

Kordinatensystem festlegen
Diagramme
Übersichtliche Matrix über gegeben und gesucht

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 433-443

Gedanken:

Aufgaben mit beliebig kombinierten Bewegungen sind so vielfältig, dass es keine einfachen Lösungsalgorithmen geben kann. Aber dennoch muss man die Lösung nicht dem Zufall überlassen, sondern kann sie systemtisch angehen.

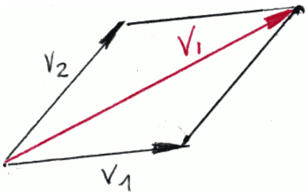
Typische Lösungsverfahren
- *Ausprobieren (typisch, wenn man nicht in Übung ist)*
- *Genialer Überblick (eher selten)*
- *Systematisch mit Diagrammen und Überischtsmatrix*

Seitenumbruch

Zusammengesetze Bewegungen

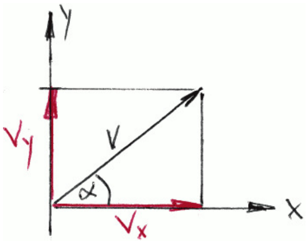
= gleichzeitige Bewegung in unterschiedliche Richtungen (z.B. Vorschubbewegungen beim Kegeldrehen)

Grundlagen



v_r: resultierende Geschwindigkeit

Geschwindigkeiten sind Vektoren (=Größen mit Richtung). Sie werden rechnerisch und zeichnerisch wie Kräfte behandelt, z.B. geometrisch addiert.



$v_x = v \cdot \cos\alpha \qquad v_y = v \cdot \sin\alpha$

Bewegungen können in Einzelbewegungen mit vorgegebenen Richtungen zerlegt werden.

waagerechter Wurf (v_{y0} = 0 bzw. α = 0)

Wertetabelle erweitern

	x	x	x	x	x-y	y	y	y	y
Weg	a m/s²	Δs m	v_{Vor} m/s	v_{Nach} m/s	Δt	a m/s²	Δs	v_{Vor} km/h	v_{Nach} km/h
0 – 1	0	100	500	500		-9,81		0	

Waagerechter Wurf

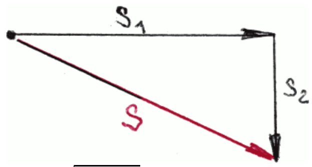
Der waagerechte Wurf beginnt mit der senkrechten Geschwindigkeit v_{y0} = 0, deshalb gelten für die senkrechten Komponenten des Wurfes die Gesetze des freien Falls ff).

Zusammenhang zwischen Wurfhöhe h, Wurfweite s_x und Wurfgeschwindigkeit v_x:

Für die waagerechte Komponenten des Wurfes nehme man die Gleichung mit Δs = h und der konstanten Geschwindigkeit $v_m = v_x$ und setzt sie in Gleichung ein. Dies ist möglich, da die Zeit T für waagerechte und senkrechte Bewegungen gleich tickt .

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{s_x}{v_x}\right)^2 \qquad (1)$$

Quelle: Wolf S.5



$s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$: *tatsächlich zurückgelegter Weg*

Die Ortsveränderung des Körpers erhält man, indem man die Einzelbewegungen gedanklich nacheinander ausführt.

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 444

1) *Beispielrechnung*
2) *Horizontale Bewegung in x-Richtung ohne Beschleunigung: a = 0*
3) *Vertikale Bewegung in y-Richtung mit konstanter Beschleunigung a = g*

Indizierungen und Vorzeichen können vereinfacht werden, solange die Aufgaben übersichtlich bleiben.

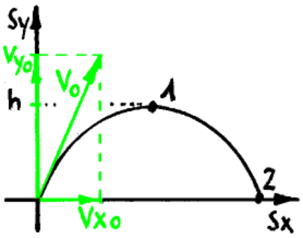
Überarbeiten

Seitenumbruch

schräger Wurf ($v_{y0} \neq 0$ bzw. $\alpha \neq 0$)

Quelle: Wolf S.7

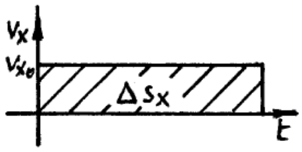
[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 450, 449
1)



$s_x = \Delta s_{x02}$ (Wurfweite)

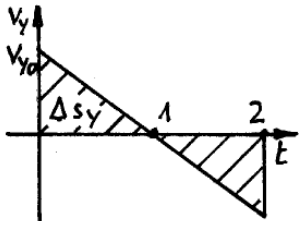
$T = \Delta t_{02}$ (Flugdauer)

$$\boxed{\begin{aligned} v_{x0} &= v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{y0} &= v_0 \cdot \sin\alpha \end{aligned}}$$



horizontale Bewegung ($a_x = 0$)

$$\boxed{\Delta s_x = v_{x0} \cdot \Delta t}$$



vertikale Bewegung ($a_y = -g$)

$$\boxed{\Delta s_y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t}$$

$\Delta v_y = a \cdot \Delta t \quad \rightarrow$

$$\boxed{v_{y1} = v_{y0} - g \cdot \Delta t_{01}}$$

Wurfhöhe h

$$\Delta s_{y01} = \frac{\cancel{v_{y1}^2} - v_{y0}^2}{-2 \cdot g} \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \frac{v_{y0}^2}{2 \cdot g}}$$

Zusammenhang zwischen Wurfweite s_x, Abwurfgeschwindigkeit v_0 und Abwurfwinkel α, wenn Start- und Zielpunkt auf gleicher Höhe liegen.

Herleitung: [Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe 448

$$s_x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

Zusammenhang zwischen Wurfdauer t, Abwurfgeschwindigkeit v_0 und Abwurfwinkel α, wenn Start- und Zielpunkt auf gleicher Höhe liegen.

Herleitung: [Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe ??

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

Zusammenhang zwischen Wurfweite s_x, Abwurfgeschwindigkeit v_0, Abwurfwinkel α und dem Höhenunterschied Δs_y zwischen Start- und Zielpunkt.

Herleitung: [Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgabe ??

$$s_x = v_x \cdot \left[-\frac{v_{y0}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{y0}}{g}\right)^2 + \frac{2 \cdot \Delta s_y}{g}} \right]$$

Wenn Anfangsgeschwindigkeit vy0 und Höhenunterschied Δs_y nach oben positiv gewählt werden, wird die Erdbeschleunigung g negativ.

Gleichförmige Drehbewegung

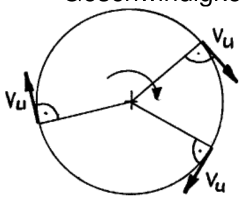
= gleiche Anzahl von Drehungen bei gleichen Zeitabschnitten

$$Drehzahl = \frac{Anzahl\ der\ Umdrehungen}{Zeitabschnitt}$$

$$\boxed{n = \frac{z}{\Delta t} \quad \left[\frac{U}{min}; \frac{1}{min}; min^{-1}\right]}$$

Umfangsgeschwindigkeit v_u

= Geschwindigkeit eines Punktes am Umfang



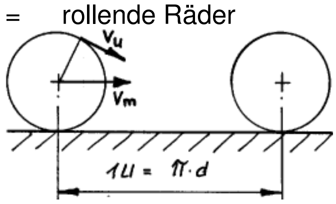
Die Umfangsgeschwindigkeit wirkt entlang der Tangente in Richtung der Drehung.

$$Umfangsgeschwindigkeit = \frac{zurückgelegter\ Weg}{Zeitabschnitt}$$

$$v_u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot d \cdot z}{\Delta t} = \pi \cdot d \cdot \frac{z}{\Delta t} \qquad \boxed{v_u = \pi \cdot d \cdot n \quad \left[\frac{m}{min}; \frac{m}{s}\right]}$$

Mittelpunktsgeschwindigkeit v_m

= rollende Räder



$$\boxed{v_m = v_u}$$

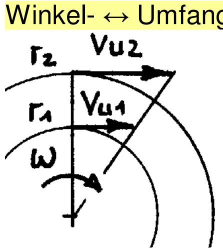
Winkelgeschwindigkeit

= vom Radius unabhängige Geschwindigkeitsangabe
Einheit rad (Radiant): $2\pi\ rad \simeq 360°$

$$Winkelgeschwindigkeit = \frac{Drehwinkel\ (\text{in rad})}{Zeitabschnitt}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot z}{\Delta t} = 2\pi \cdot d\, n \quad \left[\frac{rad}{s}; \frac{1}{s}\right]}$$

Winkel- ↔ Umfangsgeschwindigkeit



v_u nimmt linear mit dem Radius r zu

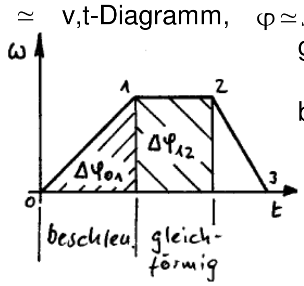
$$\frac{v_{u1}}{r_1} = \frac{v_{u2}}{r_2} = \omega$$

$$v_u = 2\pi \cdot r \cdot n$$

$$\boxed{v_u = \omega \cdot r}$$

ω,t - Diagramm

≃ v,t-Diagramm, $\varphi \simeq s$



gleichförmige Bewegung

$$\Delta\varphi_{12} = \omega_m \cdot \Delta t$$

beschleunigte Bewegung

$$\Delta\varphi_{01} = \omega_m \cdot \Delta t = \frac{1}{2}\omega_1 \cdot \Delta t$$

Formel → ([EuroTabM] „Einheiten im Messwesen“, „Geschwindigkeit“))

1) *Vergleiche: Beschleunigung eines PKW von 0 auf 100 km/h in 5 s:*

$$a = \frac{v_t - v_0}{\Delta t} = \frac{(100-0)\frac{km}{h}}{5\text{s}} = \frac{100000\, m}{3600\, s \cdot 5\text{s}} = 5{,}56\frac{m}{s^2}$$

Merke: auch hoch motorisierte Fahrzeuge beschleunigen im freien Fall am schnellsten:

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben: 453-455:

1) *Da das Rad am Boden still steht, dreht sich dort nicht der Umfang mit vu, sondern der Mittelpunkt mit v_m = -v_u*
2) *Wenn sich das Rad 1x dreht, hat sich der Mittelpunkt um den Weg des Umfanges bewegt, also ist v_m = -v_u*

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben: 456

1) *Vgl. Drehmoment = vom Radius unabhängige Kraftangabe*

Radiant oder Bogenmaß ist der Umfang am Einheitskreis (r=1).
rad steht für 1 und muss nicht geschrieben werden.
Definition nach SI: [EuroTabM] "Einheiten"

[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15], Aufgaben: 460ff:

Beispiel:

Ein Reifen 165/70 macht bei 100km/h 928 U/min.
Gesucht ist die Winkelgeschwindigkeit φ

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi \cdot 928\, rad}{60\, s} = 97{,}2\frac{rad}{s} = 97{,}2\frac{1}{s}$$

Ein Reifen 165/70 hat einen dynamischen Abrollumfang von 1795 mm [TabB Kfz HJ]

Analogie φ, v_U bzw. n

	Umdrehung	Umfang
φ: Winkel (kleines Phi)	$\varphi = 2\pi_{rad} \cdot z$ z: Anzahl Umdr.	$\varphi = \frac{s_U}{r}$ s_U: Weg am Umfang
ω: Winkel-Geschwindigkeit (kleines Omega)	$\omega = 2\pi_{rad} \cdot n$ n: Drehzahl	$\omega = \frac{v_U}{r}$ v_U: Umfangs-geschwindigkeit
α: Winkel-Beschleunigung (kleines Alpha)	$\alpha = 2\pi_{rad} \cdot \dot{n}$ $\dot{n}$: Drehbeschl.	$\alpha = \frac{a}{r}$ a: Umfangs-beschleunigung

Alle Gleichungen aus der Formelsammlung können prinzipiell weiter verwendet werden.

Seitenumbruch

Literaturverzeichnis

[Agricola 1548]: Georg Agricola, De Re Metallica libri XII - 12 Bücher vom Berg- und Hüttenwesen, Wiesbaden 2003?
[Bargel/Schulze 2005]: H.-J. Bargel, G. Schulze, Werkstoffkunde, Berlin 2005
[Bargel/Schulze 2005]: H.-J. Bargel, G. Schulze, Werkstoffkunde, Berlin 2005
[Böge Aufg.]: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
[Böge Aufg.]: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
[Böge, Schlemmer: Aufgaben 15]: Alfred Böge, Walter Schlemmer, Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
[Böge, Techn. Mechanik]: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009
[Böge, Techn. Mechanik]: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009
[Bosch 21]: Ulrich Adler ua., Kraftfahrtechnisches Taschenbuch, Stuttgart 1991
[Decker 2009]: Decker et al., Maschinenelemente, München 2009
[Duden 2006]: -, Duden - Die deutsche Rechtschreibung, Mannheim 2006
[EuroRBM]: , Europa Rechenbuch Metall, Haan-Gruiten
[EuroRBM]: , Europa Rechenbuch Metall, Haan-Gruiten
[EuroTabM]: , ,
[EuroTabM]: Ulrich Fischer ua., Tabellenbuch Metall, Haan-Gruiten
[Ferguson 1992]: Eugene S. Ferguson, Das innere Auge - von der Kunst des Ingenieurs, Basel 1993
[Ganten 2003]: Detlev Ganten ua., Naturwissenschaft - Alles, was man wissen muss, München 2003
[Haberhauer 2008]: Horst Haberhauer, Ferdinand Bodenstein, Maschinenelemente - Gestaltung, Berechnung, Anwendung, Berlin Heidelberg 2008
[Hering 1992]: Hering ua., Physik für Ingenieure, 1992
[Hering 1992]: Ekbert Hering ua., Physik für Ingenieure, Düsseldorf 1992
[Hütte 29]: Ahrendts ua., Hütte - die Grundlagen der Ingenieurswissenschaften, Berlin 1989
[Klein 2008]: Dieter Alex ua., Klein Einführung in die DIN-Normen, Berlin 2008
[Mattheck 2003]: Claus Mattheck, Warum alles kaputt geht, Karlsruhe 2003
[Musschenbroeck 1729]: Pieter van Musschenbroek, Dissertationes physicae experimentalis et geometricae de magnete, Leyden 1729
[Rieg 2006]: Frank Rieg, Manfred Kaczmarek (Hrsg.), Taschenbuch der Maschinenelemente, Leipzig 2006
[Roloff/Matek 1995]: Matek et al., Maschinenelemente, Braunschweig 1995
SdW: wechselnde Autoren, Spektrum der Wissenschaft,Heidelberg
Steinhilper 2007 I: , Konstruktionselemente des Maschinenbaus 1,Berlin 2007
[TabB Kfz HJ]: Elbl ua., Tabellenbuch Fahrzeugtechnik,
[Tipler 1995]: Paul Tipler, Physik, 1995