Statik

für TGTM-J1

Inhaltsverzeichnis

Lehrplan

Richtziele des Unterrichts in Jahrgangsstufe 12

Die Statik als physikalisch-mathematische Grundlage jeder technischen Konstruktion stellt Lösungsverfahren zur Ermittlung von Bauteilbelastungen bereit.

25	Statik I	15 Stunden
	Die Schülerinnen und Schüler analysieren und beschreiben Kräfte und deren Wirkungen auf Systeme. Im zentralen und allgemeinen Kräftesystem berechnen sie unbekannte Kräfte. Sie wenden Kräfteaddition und Kräftezerlegung auf technische Fragestellungen an.	
	Kraft Reibung an ebenen Flächen Drehmoment Freischneiden von Bauteilen und Baugruppen Resultierende Kraft Berechnung von Stützkräften	 Nur Statik in der Ebene

Literaturverzeichnis

EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,
Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009
Ganten 2003: Detlev Ganten ua., Naturwissenschaft - Alles, was man wissen muss, 2003
Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
Böge Technologie: Alfred Böge, Technologie/Technik für Fachgymnasien und Fachoberschulen, 1994

Seitenumbruch

Einführung

FTM: um TG-Hinweise gekürzt
MVK: entfällt
TG:ja

Statik

Definition, Zweck

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in Körpern, die in Ruhe oder konstanter geradliniger Bewegung sind. Ihre Ergebnisse sind Grundlage der Festigkeitsrechnung.

FO Steinmetz-Meisterprüfung, Nürnberg ca.1570

1) Welche Fachgebiet muss man heutzutage dazu beherrschen? Statik
Verfahren der Alten: Erfahrung und Ästhetik (=Theorie?) wurden in Regeln umgesetzt.

2) Warum lassen wir am TG die konstante geradlinige Bewegung nicht zur Vereinfachung weg?
Konstante geradlinige Bewegung kann man von Ruhe gar nicht unterscheiden – z.B. fliegen wir ziemlich schnell um die Sonne.

Vereinfachungen für das TG

- alle Körper sind starr
- Reibung wird meist vernachlässigt
- nur 2D-Probleme (in der Ebene)
- Krafteingriff wird auf Punkte reduziert

3) Was wird in der Statik betrachtet? Kräfte.

4) Welche Wirkungen haben Kräfte?
Bewegungs- (Thema der Kinetik, wie Statik ein Teilgebiet der Dynamik) oder Formänderungen (meist vernachlässigt): Ideal starre Körper erfahren keine Formänderung durch Kräfte (Vgl. Hysterese im Fahrradpedal, Tritt auf schlappen Fußball). Dieses theoretische Modell hilft, viele technische Probleme einfach und mit genügender Genauigkeit zu lösen, und erlaubt z.B. die Reduktion von Reibung oder Gravitation auf einen Punkt.
Ursache für Kräfte? F = m x a; F = E x A x ε, Reibung (meist vernachlässigt) usw.

Darstellungen von Kräften

Kräfte sind Vektoren und gekennzeichnet durch
- Betrag und
- Richtung (Wirklinie WL und Richtungssinn)

F=10N nur Betrag ohne Richtungsangabe

zeichnerisch, Betrag wird durch die Länge dargestellt, Richtung durch sich selbst.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 3\,N \\ 4\,N \end{bmatrix} = [53{,}1°\,;5\text{N}]$$

5) Was muss man von einer Kraft wissen, wenn man mit ihr rechnen will? Auf den Tisch setzen (≈1kN), Tisch schieben, am Tisch ziehen.
Der Angriffspunkt der Kraft ist zwar auch wichtig, aber keine der Kraft innewohnende Eigenschaft. Wirklinie ist die Verlängerung des Kraftvektors in beiden Richtungen, Richtungssinn ist die Richtung des Kraftvektors auf der WL.
Bedeutung der Kraftrichtung: Man möge versuchen, ein Auto seitwärts anzuschieben.
Müsste genauer |F| = 10 N heißen! Einheit Newton [N] = kg m / s²

vektoriell, schließt die Richtung ein

Rechnen mit Kräften in der Statik

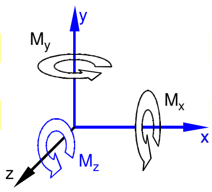
Aus $F = m \cdot a$ und a=0 (Statik!) folgt:

Allg. Gleichgewichtsbedingung

ΣF = 0

Die Hauptachsen im Raum

(Pfeilrichtung ist +)



1) Um wie viele Prozente wird die Rechnung von vereinfacht bei der Reduktion von 3D auf 2D?

FO Flieger

3D bedeutet 3 Kräfte und 3 Momente, 2 D nur 2 Kräfte und 1 Moment, d.h. die Vereinfachung beträgt 50%.
In der Ebene fallen F_z ,M_x und M_y weg: Danach ist die Indizierung von M nicht mehr nötig, weil keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.
Dreifingerregel: Koordinatensystem mit Daumen (x-Achse), Zeigefinger (y-Achse) und Mittelfinger (z-Achse) der rechten Hand aufspannen.
Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D

Aus $F = m \cdot a$ und a=0 (Statik!) folgt (2D bzw. ~~3D~~):

$\Sigma F_x = 0$	bzw.	$\Sigma F_x = 0$	$\cancel{\Sigma M_x = 0}$
$\Sigma F_y = 0$		$\Sigma F_y = 0$	$\cancel{\Sigma M_y = 0}$
$\Sigma M = 0$		$\cancel{\Sigma F_z = 0}$	$\Sigma M_z = 0$

Gelten für jedes Teil und jedes Koordinatensystem.

2) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen ?
Die zeichnerischen Lösungen beruhen auf denselben Gleichgewichtsbedingungen!

Im Einzelfall kann es sinnvoll sein, auch andere Kraftrichtungen oder Drehpunkte außerhalb des betrachteten Körpers zu wählen.

Lösbar im allg. Kräftesystem?

Für TG liegen alle Kräfte in einer Ebene:

→ es gelten 3 Gleichgewichtsbedingungen

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M = 0$

Nur 3 unbekannte Größen (Kraftbeträge, Kraftrichtungen, Momente) können gelöst werden.
Wer mehr Unbekannte hat, sollte weitere Informationen suchen oder die Aufgabe überspringen

3) Wie viele Unbekannte können mit 6/3 Gleichungen gefunden werden ?
Mit 3 Gleichungen kann man 3 unbekannte Kräfte ermitteln (statische Bestimmtheit).
Als statisch bestimmtes ebenes System bezeichnet man einen Körper, der so gelagert ist, dass nur drei unbekannte Auflagerreaktionen angreifen.
Beispiel: Eine Lagerung mit Fest- und Loslager ist statisch bestimmt, eine Lagerung mit 2 Festlagern ist überbestimmt.
Statisch überbestimmte System (mehr Auflagerreaktionen möglich) erfordern weitere Gleichungen zur Lösung (z.B. Dehnung durch Kraft oder Wärme bei zwei Festlagern).
Weniger Auflagerreaktionen heißt einfach, dass das Teil lose ist.
Die statische Bestimmtheit muss in jeder Raumrichtung erfüllt sein.

Lösbar im zentrales Kräftesystem?

Im zentralen KS wirken alle Kräfte durch einen Punkt

→ ohne Hebelarme wirken keine (Dreh-)Momente

→ es gelten nur noch 2 Gleichungen

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$

Im zentralen KS sind nur noch 2 Größen lösbar, z.B.
– eine Kraft nach 1 Betrag und 1 Richtung oder
– 2 Kräfte mit bekannter Richtung

Das Reaktionsprinzip und seine Folgen

Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio)

Um mit ihnen rechnen zu können, muss man die paarweisen Kräfte trennen → Freimachen

4) Tauziehen mit je 5kN (500kg): Zugkraft im Tau?
Die Zugkraft beträgt 5kN und nicht etwa das Doppelte, denn Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio). Die Kräftepaare addieren sich nicht, sondern heben sich auf, und erfüllen so die Gleichgewichtsbedingung trivial und nutzlos. Um die Gleichgewichtsbedingungen anwenden zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen und betrachtet dann alle Kräfte, die von außen auf eine beliebige Baugruppe wirken. Das Verfahren heißt Freimachen und wird unten behandelt.

Vertiefung: keine

Statik I: Zentrales Kräftesystem

Zeichnerische Lösungen im zentralen Kräftesystem..

Statik I ⇒ Zentrales Kräftesystem ⇒ alle Kräfte wirken durch einen Punkt ⇒ keine Hebelarme ⇒ Es treten keine Momente auf ⇒ Gleichgewichtsbedingung ΣM = 0 entfällt ⇒ nur 2 unbekannte Größen sind lösbar.

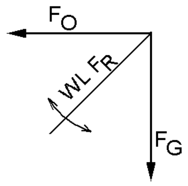
Zielgruppe: alle

Angewendet werden die statischen Grundoperationen Parallelogramm, Erweiterungssatz, Verschiebesatz.
Die ausgeführten Beispiele stammen aus der ersten Quelle:
ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik_Ub_zentral.pdf; [EuroRBM] "Kräfte"

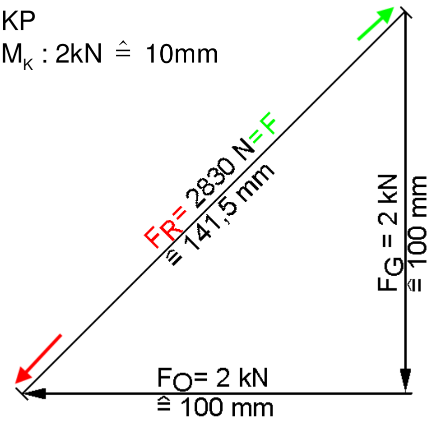
Zusammensetzen von Kräften

TG: Aufg. 1a, Oberleitungsrolle
MVK: [EuroRBM]
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 32ff
[Böge Aufg.] Aufgabe 29-31 sind ungenau gestellt.

LP Seilrolle
M_L : noch nicht nötig



KP
M_K : 2kN ≙ 10mm



Arbeitsplan

Arbeitsplan kann auch Algorithmus, Kochrezept, Arbeitsanweisung, Vorgehensweise heißen.

Ergebnis abschätzen

0. Lageplanskizze
Geeignete Baugruppe auswählen und nennen!

Welche Kräfte wirken überhaupt ?
Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 der Punktzahl .

1. Lageplan
Alle auf die BG wirkenden Kräfte einzeichnen
– Wirklinien winkeltreu
– Richtungen: wie wirkt RdW auf BG
– Angriffspunkte lagetreu (Lagemaßstab).

Kräfte eintragen, wo sie wirken.
Der Lageplan ist die zeichnerisch-formale Fassung von "Gegeben und Gesucht".
Im allgemeinen Kräftesystem fließen über den Lagemaßstab der Abstand der Kräfte und damit die Momente ein. Beim zentralen System erübrigt sich das Eintragen der Angriffspunkte, da sie alle an einem Punkt angreifen.
Unbekannte WL können wie gezeigt oder für rechn. Lösungen mit x- und y-Komponenten dargestellt werden.
Richtung: Wie wirkt der Rest der Welt auf die Baugruppe.

2. Kräfteplan
Kräfte eintragen
– maßstabsgerecht (Kräftemaßstab)
– hintereinander als Pfeilkette
– winkeltreu (Parallelverschiebung)

Kräfte bilden einen geschlossenen Linienzug.
Der Kräfteplan ist das Lösungsverfahren und sollte streng vom LP unterschieden werden. Deshalb akzeptiere ich auch keine Parallelogramme, die bei 2 Kräften noch möglich wären. Die Richtungen sollen per Parallelverschiebung übertragen werden, weil dies erfahrungsgemäß wesentlich weniger Fehler erzeugt.
Die gegebenen Kräfte werden in beliebiger Reihenfolge maßstabsgerecht und richtungsgemäß so aneinander gereiht, dass sich ein fortlaufender Kraftezug ergibt. Der Anfangspunkt kann beliebig gewählt werden.

3. Resultierende F_R / Gegenkraft F
F_R (Ersatzkraft) ist die 'Abkürzung im KP' und ersetzt die gegebenen Kräfte
F schließt das Krafteck und hält gegen die gegebenen Kräfte

Ob die Resultierende oder die Gegenkraft gefragt ist, hängt von der Aufgabe ab.Beide sind gleich groß, aber entgegengerichtet.
Die Resultierende ist die Kraft, die die gegebenen Kräfte ersetzen kann. Beispiel: Wenn auf ein Fahrzeug Antriebskräfte, Luftwiderstand und Rollreibung wirken, kann man diese zusammenfassen und mit der Resultierenden die Beschleunigung zu ermitteln.

Ausmessen, umrechnen mit M_K.
Plausibilitätsbetrachtung

Plausibilität: Kann das stimmen?
Vorher Ergebnis abschätzen und nachher Plausibilitätsbetrachtung gehören zu jeder Aufgabe.

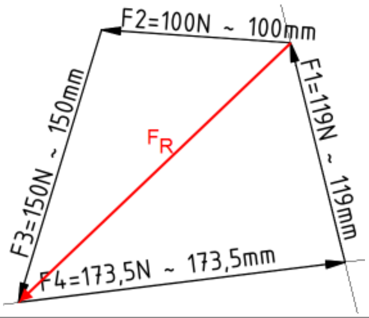
Vertiefung

FTM: [Böge Aufg.] Aufg.29ff

Zerlegen von Kräften

TG: Aufg. 4a: Eimerziehen2
MVK: [EuroRBM]
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 40f

LP siehe Aufgabe
KP M_K = 100N ≙ 100mm



Arbeitsplan

0-3 wie oben (bek. Kräfte addieren)

Ültg:Aufgabe 3
Grundsätzlich andere Aufgabe, da nicht eine Kraft gesucht wird, sondern zwei.

4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen
– WL einer Kraft parallel verschieben durch den Anfang von F_R und
– WL der anderen Kraft parallel verschieben durch den Endpunkt von F_R.
– Die unbekannten Kräfte werden durch den Schnittpunkt begrenzt.
– Richtung der Kräfte einheitlich (mit / gegen Uhrzeigersinn)

Zu diesem Verfahren müssen die Kraftrichtungen bekannt sein. Hinweise auf die Kraftrichtungen hat man bei Seilen, Ketten, Zweigelenkstäben, einwertigen Lagern usw.
Wenn die Kraftrichtungen nicht bekannt sind, müssen die Drehmomente eingerechnet werden, dies geschieht zeichnerisch im Schlusslinienverfahren.
Drei und mehr unbekannte Kräfte sind ohne Randbedingungen nicht lösbar.

F_R muss im Kräfteplan nicht eingetragen werden.

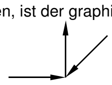
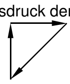
Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM], FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 49ff

Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen

Alle Kräfte, die sich im Lageplan in einem Punkt treffen, ergeben im Kräfteplan einen geschlossenen Linienzug.

Der geschlossene Linienzug, bei dem alle Kräfte mit oder alle Kräfte gegen den Uhrzeiger weisen, ist der graphische Ausdruck der Gleichgewichtsbedingungen.

LP:  KP: 

Statik_TA_zentral-zeichnerisch.odt
Seitenumbruch

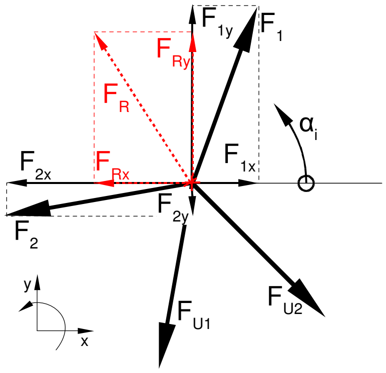
Rechnerische Lösungen im zentralen Kräftesystem

TG: Aufg. 4a, Mobile Antenne; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 51f

Systematische Lsg. - Zusammensetzen
(ohne KP)

TG: Aufg. 4a: Mobile Antenne.
Geg: F_1; F_2; Ges.: F_R; F_3; F_4

Lageskizze mobile Antenne



Arbeitsplan:

Dieser programmierfähige Algorithmus spart fehlerträchtige Überlegungen und übt alle nötigen Techniken ein:

1. Lageplanskizze
2. Koordinatensystem festlegen
3. Tabelle der Kräfte erstellen

TG: UB Statik zentral

Das Freimachen ist unverzichtbar, um die Aufgabe auf die Kräfte zu reduzieren. Zur Dokumentation genügt eine Skizze.

Alle Winkel α von der x-Achse aus!

	|F| [N]	α [°]	F_x [N]	F_y [N]
F_1	250	70	85,5	234,9
F_2	200	190	-197	-34,7
F_R	229,1	119,1	-111,5	200,2
F_{U1}	76,6	260	-13,3	-75,4
F_{U2}	176,5	-45	124,8	-124,8
	Kontrolle: Σ =		0	0

Wenn alle Winkel α von der selben (x-)Achse gemessen werden, ergeben sich später die Vorzeichen automatisch. Das mag im ersten Moment umständlich erscheinen, erspart aber später Nachdenken und daraus resultierende mögliche Fehler.

$$F_{1x}=F_1\cdot\cos\alpha_1=250\,N\cdot\cos 70°=85{,}51\,N$$
$$F_{1y}=F_1\cdot\sin\alpha_1=250\,N\cdot\sin 70°=234{,}92\,N$$
$$F_{2x}=F_2\cdot\cos\alpha_2=200\,N\cdot\cos 190°=-196{,}96\,N$$
$$F_{2y}=F_2\cdot\sin\alpha_2=200\,N\cdot\sin 190°=-34{,}73\,N$$
$$F_{Rx}=+F_{1x}+F_{2x}=85{,}51\,N+(-196{,}96\,N)$$
$$=-111{,}45\,N$$
$$F_{Ry}=+F_{1y}+F_{2y}=+234{,}92\,N+(-34{,}73\,N)$$
$$=200{,}19\,N$$
$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=229{,}1\,N$$
$$=\sqrt{(-111{,}45\,N)^2+(200{,}19\,N)^2}$$
$$\alpha'_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}=\arctan\frac{200{,}19\,N}{-111{,}45\,N}=-60{,}9°$$

nach links oben

$$\alpha_R=\alpha'_R+180°=-60{,}9°+180°=119{,}1$$

zur +x-Achse

4. Kräfte in Komponenten zerlegen

Komponenten=Koordinatenrichtungen

$F_{nx}=F_n\cos\alpha_n$; $F_{ny}=F_n\sin\alpha_n$

5. Komponenten addieren

ergibt die Komponenten der Resultierenden F_R: $F_{Rx}=\Sigma F_{nx}$, $F_{Ry}=\Sigma F_{ny}$

6. Betrag $|F_R|$ der Resultierenden

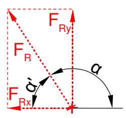
$$|F_R|=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}$$

7. Richtung α_R der Resultierenden

arctan liefert zweideutigen Werte → Winkel muss präzisiert werden:

$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

– Vorzeichen der Komponenten → Skizze



oder

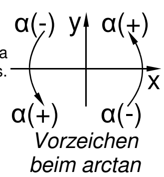
– α ab +x-Achse angeben
Für $F_{Rx}\geq 0$ gilt: $\alpha_R=\alpha'_R$
Für $F_{Rx}<0$ gilt: $\alpha_R=\alpha'_R+180°$

Für die Zerlegung in Komponenten muss man genau einmal überlegen, ob man sin oder cos einsetzen muss, danach läuft alles automatisch. Alle x-Komponenten erhalten das eine, alle y-Komponenten das andere. Die Vorzeichen der Komponenten ergeben sich wegen des einheitlichen Bezuges der Winkel auf die x-Achse automatisch.

F_n meint den Betrag der n-ten Kraft. α ist der Winkel von der x-Achse gegen den Uhrzeiger bis zur Kraft. Vorzeichen von $F_{nx/y}$ ergeben sich automatisch.

Betrag mit Pythagoras aus den Komponenten berechnen.

Die genaue Richtung α_R bekommt man mit den Komponenten F_{Rx} und F_{Ry} heraus, da rentiert sich kein Algorithmus. Statt Regeln auswendig zu lernen, sollte man das Problem erkennen und nach Plausibilität lösen.



Systematische Lösung - Zerlegen

$$\Sigma F_x=0=F_{Rx}+F_{U1x}+F_{U2x}$$
$$=F_{Rx}+F_{U1}\cdot\cos\alpha_{U1}+F_{U2}\cdot\cos\alpha_{U2}$$
$$\rightarrow\quad F_{U2}=\frac{F_{Rx}+F_{U1}\cdot\cos\alpha_{U1}}{-\cos\alpha_{U2}}$$
$$\Sigma F_y=0=F_{Ry}+F_{U1y}+F_{IIy}=\ldots$$
$$\rightarrow\quad F_{U2}=\frac{F_{Ry}+F_{U1}\cdot\sin\alpha_{U1}}{-\sin\alpha_{II}}$$
$$F_{U2}=\frac{F_{Rx}+F_{U1}\cdot\cos\alpha_{U1}}{-\cos\alpha_{U2}}=\frac{F_{Ry}+F_{U1}\cdot\sin\alpha_{U1}}{-\sin\alpha_{U2}}\quad\rightarrow$$
$$F_{Rx}\cdot\sin\alpha_{U2}+F_{U1}\cdot\cos\alpha_{U1}\cdot\sin\alpha_{U2}$$
$$=F_{Ry}\cdot\cos\alpha_{U2}+F_{U1}\cdot\sin\alpha_{U1}\cdot\cos\alpha_{U2}$$
$$F_{U1}=\frac{-F_{Rx}\cdot\sin\alpha_{U2}+F_{Ry}\cdot\cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1}\cdot\sin\alpha_{U2}-\sin\alpha_{U1}\cdot\cos\alpha_{U2}}$$
$$=\frac{-(-111{,}5\,N)\cdot\sin(-45°)+200{,}2\,N\cdot\cos(-45°)}{\cos 260°\cdot\sin(-45°)-\sin 260°\cdot\cos(-45°)}=76{,}6\,N$$
$$F_{U2}=\frac{-F_{Rx}\cdot\sin\alpha_{U1}+F_{Ry}\cdot\cos\alpha_{U1}}{\cos\alpha_{U2}\cdot\sin\alpha_{U1}-\sin\alpha_{U2}\cdot\cos\alpha_{U1}}$$
$$=\frac{-(-111{,}5\,N)\cdot\sin 260°+200{,}2\,N\cdot\cos 260°}{\cos(-45°)\cdot\sin 260°-\sin(-45°)\cdot\cos 260°}=176{,}5\,N$$

8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x=0$ und $\Sigma F_y=0$

und die unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2} per Gleichungssystem lösen

$$\Sigma F_x=0=F_{Rx}+F_{U1x}+F_{U2x}$$
$$\Sigma F_y=0=F_{Ry}+F_{U1y}+F_{UIIy}$$
$$\rightarrow$$
$$F_{U1}=\frac{-F_{Rx}\cdot\sin\alpha_{U2}+F_{Ry}\cdot\cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1}\cdot\sin\alpha_{U2}-\sin\alpha_{U1}\cdot\cos\alpha_{U2}}$$
$$F_{U2}=\frac{-F_{Rx}\cdot\sin\alpha_{U1}+F_{Ry}\cdot\cos\alpha_{U1}}{\cos\alpha_{U2}\cdot\sin\alpha_{U1}-\sin\alpha_{U2}\cdot\cos\alpha_{U1}}$$

1) Herleitung nur einmalig
2) Man beachte die Symmetrie der Gleichungen, die mehrfach nützlich sein kann:
- Kontrollmöglichkeit
- Analogieschlüsse
- Ästhetik / Spass an Mathe vermitteln

Varianten:

$$F_{U1}=\frac{-F_R\cdot\cos\alpha_R\cdot\sin\alpha_{U2}+F_R\cdot\sin\alpha_R\cdot\cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1}\cdot\sin\alpha_{U2}-\sin\alpha_{U1}\cdot\cos\alpha_{U2}}$$
$$F_{U1}=\frac{-\Sigma F_{ix}\cdot\sin\alpha_{U2}+\Sigma F_{iy}\cdot\cos\alpha_{U2}}{\cos\alpha_{U1}\cdot\sin\alpha_{U2}-\sin\alpha_{U1}\cdot\cos\alpha_{U2}}$$

3) F_{UII} analog herleiten oder Symmetrie nutzen

Seitenumbruch

Individuelle Lösung anhand des KP

= Durchwursteln; für einfache Aufgaben geeignet

Dieses Lösungsverfahren kann man auch "Durchwursteln" nennen.
Für einfache Aufgaben braucht man keinen komplizierten Algorithmus. Oft genügt es, sich den Kräfteplan zu skizzieren und dann die gesuchten Kräfte mit ein paar Winkelfunktionen auszurechnen. Für individuelle Lösungen muss der Arbeitsplan sehr allgemein gehalten sein

Prinzip

1. Lageplanskizze
2. Kräfteplanskizze
3. Kräfte mithilfe KP und Winkelfunktionen berechnen

Zerlegen in rechtwinkligen Dreiecken

Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Komponenten.

$F_{Rx} = F_R \bullet \cos \alpha_R$;

$F_{Ry} = F_R \bullet \sin \alpha_R$

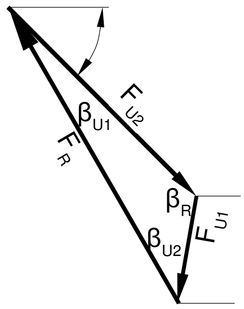
$$F_{Rx} = F_R \cdot \cos \alpha_R$$

$$F_{Ry} = F_R \cdot \sin \alpha_R$$

Das Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Kräfte ist häufig notwendig und sollte von jedem Schüler beherrscht werden..

Zerlegen im allgemeinen Fall

Kräfteplanskizze mit der bekannten Kraft F_R und den Wirklinien der unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2}



Skizze mit Werten der Beispielaufgabe

Winkel für das Beispiel:

$$\beta_{U1} = 180° - \alpha_R + \alpha_{U2} = 180° - 119,1° - 45° = 15,9°$$

$$\beta_{U2} = \alpha_R - (\alpha_{U2} - 180°) = 119,1° - (260° - 180°) = 39,1°$$

$$\beta_R = (\alpha_{U1} - 180°) - \alpha_{U2} = (260° - 180°) - (-45°) = 125°$$

$$\text{Kontrolle}: 15,9° + 39,1° + 125° = 180°$$

Auch die Berechnung der Innenwinkel könnte man automatisieren, aber dieser Aufwand lohnt sich nicht ggü. einer individuellen Lösung. Im Fall der Fälle müssen die Kräfteplanskizze und ein paar Überlegungen genügen.

Sinussatz

$$\frac{F_R}{\sin \beta_R} = \frac{F_{U1}}{\sin \beta_{U1}} = \frac{F_{U2}}{\sin \beta_{U2}}$$

Beispiel:

$$F_{U1} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U1}}{\sin \beta_R} = 229,1\,N \cdot \frac{\sin 15,9°}{\sin 125°} = 76,6\,N$$

$$F_{U2} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U21}}{\sin \beta_R} = 229,1\,N \cdot \frac{\sin 39,1°}{\sin 125°} = 176,4\,N$$

Vertiefung

Aufg. wie in Böge übernehmen

TG: UB Statik zentral
MVK: [EuroRBM]
FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 52ff

Seitenumbruch

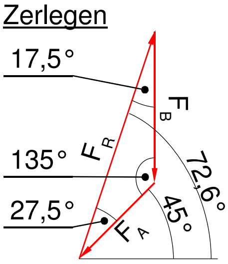
[Böge Aufg.] Aufg. 51

Zusammensetzen

	|F|	α	F_x	F_y
F_1	320N	35°	262,1N	183,5N
F_2	180N	55°	103,2N	147,4N
F_3	250N	160°	-234,9N	85,5N
F_R	436,3N	72,6°	130,4N	416,4N
F_A	184,5N	225°	-130,4N	-130,4N
F_B	286,0N	270°	0	-286,0N

$$F_{1x}=F_1\cdot\cos\alpha_1=320N\cdot\cos 35°=262{,}1N$$
$$F_{1y}=F_1\cdot\sin\alpha_1=320N\cdot\sin 35°=183{,}5N$$
$$F_{2x}=F_2\cdot\cos\alpha_2=180N\cdot\cos 55°=103{,}2N$$
$$F_{2y}=F_2\cdot\sin\alpha_2=180N\cdot\sin 55°=147{,}4N$$
$$F_{3x}=F_3\cdot\cos\alpha_3=250N\cdot\cos 160°=-234{,}9N$$
$$F_{3y}=F_3\cdot\sin\alpha_3=250N\cdot\sin 160°=85{,}5N$$
$$F_{Rx}=+F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}=262{,}1N+103{,}2N-234{,}9N$$
$$=130{,}4N$$
$$F_{Ry}=+F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}=183{,}5N+147{,}4N+85{,}5N$$
$$=416{,}4N$$
$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=436{,}3N$$
$$=\sqrt{(130{,}4N)^2+(416{,}4N)^2}$$
$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}=\arctan\frac{416{,}4N}{130{,}4N}=72{,}6°$$
$$\text{zur positiven x-Achse (nach rechts oben)}$$

Zerlegen



$$F_A=F_R\cdot\frac{\sin\alpha_A}{\sin\alpha_R}=436{,}6N\cdot\frac{\sin 17{,}4°}{\sin 135°}=185N$$
$$F_B=F_R\cdot\frac{\sin\alpha_B}{\sin\alpha_R}=436{,}6N\cdot\frac{\sin 27{,}6°}{\sin 135°}=286N$$

Statik_TA_zentral-rechnerisch.odt
Seitenumbruch

Freimachen von Körpern

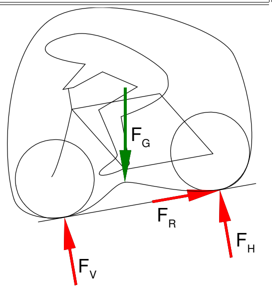
= Bauteile durch Kräfte ersetzen

Zweck

– Erkennen aller Kräfte an einer BG
– Voraussetzung für alle Lösungen in der Statik

Beispiel

Lageskizze Rad + FahrerIn
Ges.: Aufstandskräfte



Vorgehensweise

1. Baugruppe BG wählen

– Geeignete BG grenzen an gesuchte Kräfte

2. Alle Kräfte eintragen

– An jedem Kontakt zw. der BG und dem Rest der Welt
– ⊥ rechtwinklig zur Berührfläche (Normalkraft) bzw.
‖ parallel zur Berührfläche (Reibung)
– Gravitation (Gewichtskräfte)

3. Bekannte Kräfte mit Richtung

– Richtung: Wie wirkt der RdW auf die BG?

4. Unbekannte Kräfte

– Einwertiges Lager: Richtung annehmen
Zweiwertiges L.: 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x, F_y)

5. Lösbarkeit prüfen

– Lösbar sind max. als 3 unbekannte Größen (Beträge und/ oder Richtungen von Kräfte).

Wer zu viele Unbekannte hat, muss Infos suchen:

L. Lageplanskizze anfertiegen

– LS dokumentiert die Überlegungen

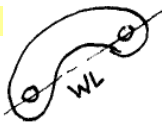
Hinweise auf Richtungen von Kräften

Seile, Ketten usw.

übertragen nur Zugkräfte in Seilrichtung

Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)

= an 2 Stellen drehbar gelagert
übertragen Zug- oder Druckkräfte nur in der Verbindungslinie der Gelenkpunkte.
z.B. Kolben, Gitterstäbe

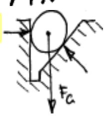


Berührflächen

übertragen Normalkräfte senkrecht und Reibkräfte parallel zur Berührfläche.

Rollkörper

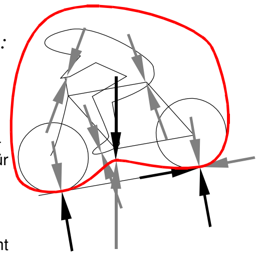
Normalkräfte bei Rollkörper (Kugeln, Rollen) gehen durch ihren Mittelpunkt.



FTM, TG: Erarbeiten anhand der Übungen; MVK: entfällt

In der Statik ist das "Freimachen" der geistig anspruchsvollste Schritt (den das Fach Technik M am TG zu bieten hat), es ist der häufigste Grund für Scheitern. Im zentralen Kräftesystem sind die Aufgaben meist so einfach gestrickt, dass das Freimachen intuitiv möglich ist. In den Übungen zum zentralen KS wird die zentrale Bedeutung des Freimachens also nicht klar, deshalb führe ich diese Einheit erst danach durch und vertiefe es in den Übungen zum allgemeinen KS.
Nur mit den Freimachen ist gewährleistet, dass alle an der BG angreifenden Kräfte richtig erfasst werden.

1) Im System Rad+FahrerIn findet man zahlreiche Kräfte und Gegenkräfte (Kräftepaare):
Rad drückt gegen Straße und zurück, vorne wie hinten, Reibung vs. Antriebskraft, Hände vs. Lenker, Gesäß vs. Sattel, Erde zieht an Rad+Fahrer und umgekehrt, u.v.a.m.



2) Was kann man damit anfangen?
Nix! Die Anzahl/Unzahl der Kräfte ist unhandlich und Kräftepaare, die sich per se aufheben, bieten keinen Ansatz für die Gleichgewichtsbedingungen.

3) Gesucht ist ein Verfahren, um die Kräftepaare zu reduzieren und aufzusprengen
→ Freimachen: Man entscheidet sich für eine BG und zieht einen symbolischen Kringel darum. Reduktion: Alle Kräftepaare, die innerhalb oder außerhalb des Kringels liegen, werden ignoriert. Fraktion: Von den Kräftepaaren, die an der Grenze der BG liegen bzw. von der Systemgrenze zerschnitten werden, betrachtet man nur die Kräfte, die von außen auf die BG wirken.

(Böge, Techn. Mechanik) einarbeiten,

Im Prinzip muss man nur die gesuchten Kräfte eintragen und hat schon einen Teil der Grenze der geeigneten Baugruppe. Auf die BG dürfen beliebig viele bekannte Kräfte wirken. Sonstige Kräfte sind im Einzelfall nötig, sie zählen aber zu den unbekannten Kräften.
Gewichts- und Reibungskräfte werden berücksichtigt, wenn es verlangt wird.

Vom freizumachenden Körper werden alle Berührstellen entfernt und durch die zugehörigen Kräfte ersetzt. Am Besten denkt man sich eine Linie um die gewählte Baugruppe und sucht alle Kräfte, die diese Linie überschreiten.
Schüler setzen Kräfte oft nach Wunschdenken ein, z.B. "da brauche ich noch eine Kraft" oder auf Verdacht "Da bewegt sich was". Das führt zu vielen Fehlern.

Mit der Vorzeichenregel „Wie wirkt der Rest der Welt (RdW) auf die Baugruppe (BG)“ wirken Schwerkräfte nach unten. Es käme auch zu richtigen Ergebnissen, trüge man ALLE Richtungen „falsch“ herum ein (Schwerkraft nach oben!), aber Mischen der Richtungssysteme funktioniert nie.

Bei zeichnerischen Lösungen muss man keine Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen, es genügen die WL. Bei rechnerischen Lösungen sind die Richtungen nötig für die Vorzeichen in den Gleichungen. Wenn man eine Richtung „falsch“ angenommen hat, wird das Ergebnis negativ und es stimmt wieder.

Es sind nur 3 unbekannte Kräfte lösbar, weil nur drei Gleichgewichtsbedingungen existieren. Die Anzahl der lösbaren Unbekannten reduzieren sich, wenn nicht alle Gleichungen angewendet werden können, z.B. beim zentralen Kräftesystem (kein Momentengleichgewicht) oder wenn alle Kräfte parallel sind (Kräftegleichgewicht nur in einer Richtung).
Wenn man mehr unbekannte Kräfte findet als lösbar sind, muss man weitere Informationen suchen. Ein Lösungsversuch ohne zusätzliche Infos ist sinnlos.

Das Freimachen ist oft der schwierigste Teil einer Statikaufgabe, deshalb gebe ich für eine lesbare LS bereits 1/4 bis 1/3 der Punkte. Umgekehrt gibt es ohne LS nie die volle Punktzahl. Lösungen in der Statik sind komplex und die Fehlerquote steigt stark an, wenn man wesentliche Lösungsschritte im Kopf jonglieren → LS liegt im Eigeninteresse des Schülers.

Kein TA, nur beiläufig einließen lassen

Gemeinsame Wirkungslinie ist notwendig in der Definition, damit auch gebogenen Teile als Pendelstützen gesehen werden können. Die Form der Pendelstütze spielt keine Rolle.

Wenn die Reibung berücksichtigt werden muss, ist sie gegen die Bewegungsrichtung einzutragen. Die Haftreibung $F_R = \mu \times F_N$ ist nicht die tatsächliche Reibkraft, sondern ihr höchstmöglicher Wert. Deshalb ist die Reibkraft in aller Regel unbekannt.
Meist wird die Reibung vernachlässigt.
Für die Rollreibung im Ruhezustand gilt dasselbe wie für die Haftreibung oben.

Verschiebesatz: Wenn über eine Rolle ein Seil gelegt ist, das in beide Richtungen gleich stark zieht, spielt ihr Durchmesser „keine Rolle“.

Seitenumbruch

Lose und feste Lager

sind in allen Richtungen (F_x, F_y, $\cancel{F_z}$, $\cancel{M_x}$, $\cancel{M_y}$, M_z) außer einer, zwei, drei beweglichen Möglichkeiten

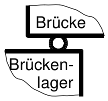
Richtung einer Drehung wird mit der Richtung der Drehachse angegeben. Da wir nur 2-D-Systeme betrachten, entfallen F_z, M_x und M_y, und Index z beim Moment.
Wenn die Reibung ausnahmsweise berücksichtigt wird, zählt diese als Stützkraft.

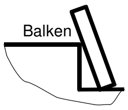
Einwertige Lager

sind in allen Richtungen außer einer beweglich.

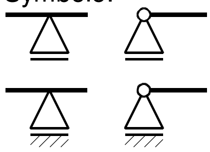
Ihre Wirklinie ist eindeutig bestimmt. (einwertige Stützkräfte bzw. Pendelstützen, Seil, usw.) sind beim Lösen von Aufgaben besonders wichtig.

konstruktive Beispiele



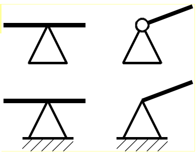


Symbole:



Zweiwertige Lager

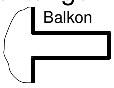
sind in allen Richtungen außer zweien beweglich.

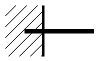


FO Brückenlager

Dreiwertige Lager

sind in allen Richtungen fest.





Vertiefung

FTM, TG: AB Statik_Ub_Abi ([Böge Aufg.] Aufgabe 9..28 sind zu leicht)

Statik_TA_Freimachen.odt

Seitenumbruch

Statik II: Allgemeines Kräftesystem

Auflagerkräfte berechnen im allgemeinen System

Zeichnerisches Pendant: Schlusslinienverfahren.

Anwendung

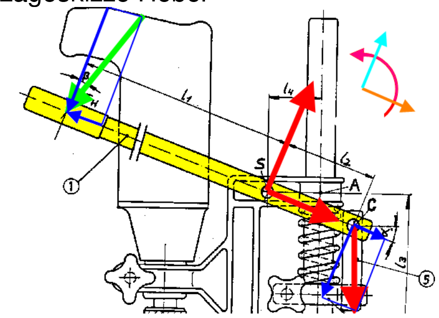
– Auflagerkräfte
– besonders
  – "Ab welchem .. kippt.."
– Bei komplizierter Bemaßung besser zeichnerisch lösen (Schlusslinienverfahren)
  (HP 98/99-2 Zugmaschine mit Anhänger)

TGT: ja; TGTM: ja; FTM: ??

Statikaufgaben der Ebene löst man, indem man die 3 Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$ und $\Sigma M = 0$ für ein beliebiges Koordinatensystem aufstellt und mit dem entstehenden Gleichungssystem max. 3 unbekannte Größen löst.
Schon das Aufstellen der Gleichungen wird durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystemes erleichtert.
Wenn man das Gleichungssystem händisch lösen will/muss, sollte man weitere Möglichkeiten zur Vereinfachung nutzen, z.B. einen geschickten Drehpunkt für das Momentengleichgewicht.
Warum Algorithmen ? Die Stärke des Menschen ist es eigentlich, sich auf **neue** Probleme einzustellen, während wiederkehrende Spezialaufgaben wie Fliegen fangen besser von Frösche beherrscht werden [Ganten 2003]. Das sollte auch Schule fördern, also Vielseitigkeit verlangen und statt stumpfsinniger Tätigkeiten. Dem gegenüber steht, dass Ingenieure meist Standardprobleme mit Standardmethoden bearbeiten. Und Schüler können in einer 4,5-stündigen Abi-Prüfung nicht dauernd hochkonzentriert arbeiten und brauchen Lösungsmethoden, die eine reduzierte Hirnleistung vertragen: Also doch Algorithmen.
. Umstellen auf Aufstellen der Gleichgewichtsbedingung und Lösen per CAS-Rechner?

TG: HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer

Lageskizze Hebel



$$F_{Hx} = F_H \cdot \cos\beta = 100\text{N} \cdot \cos 10° = 98{,}48\,N$$
$$F_{Hy} = F_H \cdot \sin\beta = 100\text{N} \cdot \sin 10° = 17{,}36\,N$$

4) Sorgfältig auf die Vorzeichen eingehen. Jede der 3 GG-Bedingungen gehört zu einer der 3 Koordinatenrichtungen.

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft ⊥ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$\Sigma M_S = 0$

$$= 0 = F_{Hy} \cdot l_1 - F_{Cy} \cdot l_2 \quad \rightarrow$$
$$F_C = F_{Hy} \cdot \frac{l_1}{l_2 \cdot \cos\alpha} = 98{,}48\,N \cdot \frac{300\,mm}{90\,mm \cdot \cos 20°}$$
$$F_C = 349{,}3\,N$$

5) Verstärkt auf Hebelarme eingehen

$\Sigma F_x = 0$

$$= 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \quad \rightarrow$$
$$F_{Sx} = F_{Hx} - F_C \cdot \sin\alpha$$
$$F_{Sx} = 98{,}48\,N - 349{,}3\,N \cdot \sin 20° = -102{,}1\,N$$

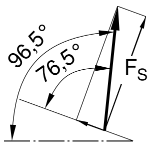
$\Sigma F_y = 0$

$$= 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \quad \rightarrow$$
$$F_{Sy} = F_{Hy} + F_C \cdot \cos\alpha$$
$$= 17{,}36 + 349{,}3\,N \cdot \cos 20°$$
$$F_{Sy} = 426{,}7\,N$$

Wenn es ein zweiwertiges Lager gibt:

$$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102{,}1\,N)^2 + (435{,}9\,N)^2}$$
$$F_S = 438{,}7\,N$$

$$\gamma_S = \arctan\frac{F_{Sy}}{F_{Sx}} = \arctan\frac{426{,}7\,N}{-102{,}1\,N} = -76{,}5°$$



Arbeitsplan

1. Lageskizze erstellen

Für alle Probleme der Statik ist Freimachen unverzichtbar. Zu seiner Dokumentation genügt eine unmaßstäbliche Skizze.

2. Koordinatensystem wählen
   – entlang der Bemaßung
   – markieren

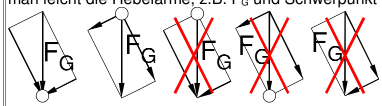
Im Momentengleichgewicht ist es meist einfacher, Kräfte in Koordinatenrichtung zu zerlegen und mit gegebenen Längen zu multiplizieren, als individuelle Hebelarme zu ermitteln – Ausnahmen bestätigen die Regel.
Beim Aufstellen der 3 Gleichgewichtsbedingungen orientiert man sich an der Markierung und vermeidet Vorzeichenfehler.

3. Richtungen für WL annehmen
   – für das Vorzeichen in Rechnungen
   – „falsche“ Annahme → negatives Ergebnis → stimmt wieder!

Man muss die Richtungen nicht kennen, sondern nur annehmen und kennzeichnen. Wenn die Richtung "falsch" angenommen wurde, wird das Ergebnis der Rechnung negativ und stimmt wieder. Es ist auch nicht sinnvoll, die "falsche" Richtungen nachträglich zu korrigieren, weil man dabei die ganze Rechnung korrigieren müsste. Wer sicher gehen will, vermerkt am negativen Ergebnis: „Kraft wirkt entgegen der Annahme.“
In zweiwertigen Lagern trägt man für unbekannte Kräfte die Komponenten in x- und y-Richtung ein.

4. Kräfte in Koordinatenrichtung zerlegen
   – wenn sie nicht schon dort liegen
   – im tatsächlichen Angriffspunkt →

Alternativ müsste man individuelle Hebelarme ermitteln und das muss nicht, kann aber kompliziert werden und fordert das Hirn – unnötig!
Bei Zerlegung außerhalb des Angriffspunktes verwechselt man leicht die Hebelarme, z.B. F_G und Schwerpunkt SP.



5a. Drehpunkt wählen
   – für händische Lsg: im Schnittpunkt zweier WL unbekannter Kräfte
     → eine Gleichung mit 1 Unbekannten = sofort lösbar.
   – CAS: beliebig

5b. Momentengleichgewicht $\Sigma M = 0$
   – im Drehpunkt ansetzen

Kräfte, deren WL durch den Drehpunkt verlaufen, haben den den Hebelarm 0 und fallen aus der Gleichung $\Sigma M = 0$. Das Momentengleichgewicht mit dem Drehpunkt im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte reduziert sich also auf eine Gleichung mit einer Unbekannten und ist so leicht zu lösen.
Wenn die Schnittpunkte nicht bemaßt ([Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.), muss man entscheiden, ob man die Maße zum Schnittpunkt ermittelt oder das Gleichungssystem löst.
Im Beispiel kann der Drehpunkt in jedem der Bolzen S oder C liegen. Hier wird S gewählt, da von dort die Bemaßung ausgeht und dies die Rechnung ein wenig erleichtert.

6. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$
   – beliebige Reihenfolge

$\Sigma F_x = 0$: In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme. Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.
$\Sigma F_y = 0$: Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

Man könnte noch einmal $\Sigma M = 0$ mit einem anderem Drehpunkt ansetzen, aber $\Sigma F = 0$ ist weniger aufwändig.

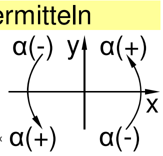
Vorzeichenregel: Es bekommen die Kräfte ein negatives Vorzeichen, deren angenommen Richtung entgegen den Koordinatenrichtungen x bzw. y wirken. Achtung: Diese Vorzeichen sind nicht die Vorzeichen des Momentengleichgewichts.

7. ggf. zusätzliche Gleichungen
   – Für jede Unbekannte eine Glchg.
   – im Abi selten, z.B. HP1983/84-2 Hebestation

8. Gleichungssystem lösen
   – per Hand oder CAS

9. Betrag und Richtung ermitteln

Achtung: arctan ergibt kein eindeutiges Ergebnis für α (Zählrichtung von α siehe rechts), deshalb muss man den Winkel mit einer Skizze deutlich machen.



Dazu skizziert man die Komponenten F_{Sx} (≈ -100N) und F_{Sy} (≈ +400N) in das gewählte Koordinatensystemund überlegt dann, wo der berechnete Winkel liegt.

10. Plausibilität prüfen

Plausibilität: Ist es plausibel, dass in F_C und F_S ca. 4x größer als F_H sind?

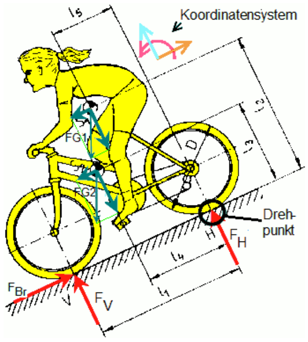
Vertiefung

Kompliziertere Aufgaben:
HP1983/84-2 Hebestation
[Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.)

Seitenumbruch

Beispiel: schiefe Ebene
z.B.HP 92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad+Fahrerin



$$F_{G1x} = F_{G1} \cdot \sin\alpha = 560\,N \cdot \sin 15{,}6° = 151{,}0\,N$$
$$F_{G1y} = F_{G1} \cdot \cos\alpha = 560\,N \cdot \cos 15{,}6° = 539{,}3\,N$$
$$F_{G2x} = F_{G2} \cdot \sin\alpha = 140\,N \cdot \sin 15{,}6° = 37{,}7\,N$$
$$F_{G2y} = F_{G2} \cdot \cos\alpha = 140\,N \cdot \cos 15{,}6° = 134{,}8\,N$$
$$mit \quad \alpha = \arctan 28\,\% = 15{,}6°$$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft ⊥ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\Sigma M_H = 0$$
$$= \pm F_{Br} \cdot 0 - F_V \cdot l_1 \pm F_H \cdot 0$$
$$+ F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4 \rightarrow$$
$$F_V = \frac{F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4}{l_1}$$
$$F_V = \frac{+151{,}0 \cdot 1000 + 539{,}3 \cdot 426 + 37{,}7 \cdot 640 + 134{,}8 \cdot 575}{1044} \cdot \frac{N \cdot mm}{mm}$$
$$F_V = 462\,N$$

In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme.
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_x = 0$$
$$= + F_{Br} - F_{G1x} - F_{G2x} \rightarrow$$
$$F_{Br} = F_{G1x} + F_{G2x}$$
$$= 151{,}0\,N + 37{,}7\,N = 189\,N$$

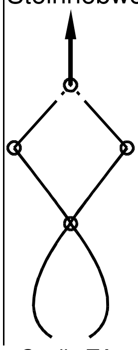
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_y = 0$$
$$= F_V - F_{G1y} - F_{G2y} + F_H \rightarrow$$
$$F_H = - F_V + F_{G1y} + F_{G1y}$$
$$= -462{,}0\,N + 539{,}3\,N + 134{,}8\,N$$
$$= 212\,N$$

Beispiel: mit Zusammensetzen

Beispiel: HP 83/84-2 Hebestation
Beispiel Kippaufgabe
Beispiel für FTM

Steinhebwerkzeuge



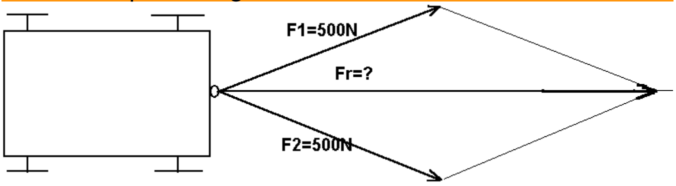
Statik_TA_allgemein-rechnerisch-Auflager.odt

Seitenumbruch

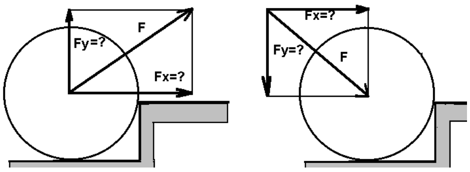
Nicht explizit unterrichten

Grundoperationen der Statik

1. Kräfteparallelogramm



Die resultierende Kraft F_r zweier in einem Punkt angreifender Kräfte ist die Diagonale des aus beiden Kräften gebildeten Parallelogramms



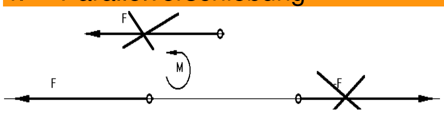
2. Längsverschiebung

Kräfte können auf ihren Wirklinien frei verschoben werden.

3. Erweiterungssatz

Zwei gleich große, gegensinnige, auf gleicher Wirklinie liegende Kräfte können zu einem Kräftesystem hinzugefügt oder von ihm fortgenommen werden, ohne dass sich die Wirkung des Kräftesystems ändert.

4. Parallelverschiebung



Eine Kraft darf auf eine parallele Wirklinie verschoben werden, wenn ein Moment M = Kraft ×Verschiebearm hinzugefügt wird (Versatzmoment).

(Dreh- oder Kraft-)Moment einer Einzelkraft

ist das Produkt aus Kraft und Wirkabstand (rechtwinklig zur Kraft gemessen)

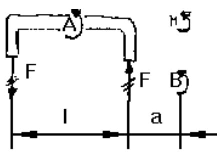
Definition

(+) = linksdrehend
(-) = rechtsdrehend

Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.

z.B. Fahrradlenker



A: $$M=F\cdot\frac{l}{2}+F\cdot\frac{l}{2}=F\cdot l$$

B: $$M=F\cdot(l+a)-F\cdot a=F\cdot l$$

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist an jedem Ort der Ebene gleich und kann deshalb beliebig in der Ebene verschoben werden.

MVK, FTM, TG: nicht unterrichten, nur beiläufig einbringen

Oben wurden schon einige „Rechenregeln" für Kräfte eingesetzt. Welche weiteren sind bekannt?

Wie der folgende Verschiebesatz vom Meister selbst als Axiom eingeführt (Sir Isaac Newton 1643-1727) [4].

Analytische Berechnung:

1 Zerlegen der Kräfte in x- und y-Komponenten F_{1x}, F_{1y}, F_{2x} und F_{2y}
2 addieren der Komponenten $F_{rx}=F_{1x}+F_{2x}$, F_{ry} analog
3 $Fr=\sqrt{F_{rx}^2+F_{ry}^2}$; $\alpha=\arctan\frac{F_{ry}}{F_{rx}}$; Zählrichtung beachten

Vektrorielle Berechnung ist einfacher, da die Komponenten Fx und Fy explizit vorliegen:

$$\vec{F_r}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=\begin{bmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{2x}\\F_{2y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{1x}+F_{2x}\\F_{1y}+F_{2y}\end{bmatrix}$$

Kräfte müssen, wie alle Vektoren, unter Berücksichtigung ihres Betrages, ihrer Wirklinie und ihrer Richtung addiert werden. Anwendung und Übung siehe unten

Resultierende Kraft ist diejenige gedachte Ersatzkraft, die dieselbe Wirkung auf einen Körper ausübt wie die Einzelkräfte F_1, F_2 .,. zusammen.

Zur Verdeutlichung der Kraftvektoren, ihrer Zerlegung und Zusammensetzung: Umgekehrt geht es auch, Anwendung später..

Auf der Ebene macht es ohne Reibung keinen Unterschied, ob man den Kinderwagen schiebt oder zieht. Am Randstein weiß jeder aus Erfahrung, dass Ziehen günstiger ist. Im Bild erkennt man, dass die aufwärts gerichtete Komponente F_x dem Wagen über den Randstein hilft. Tatsächlich ist auch auf der Ebene das Ziehen günstiger, weil es den Wagen entlastet und die Reibung vermindert. Trotzdem schiebt man Kinderwagen wegen des Blickkontaktes zum Kind und weil man sich abstützen kann.

In [Böge Technologie] und im LPE sind der Verschiebe- und der Erweiterungssatz in der Reihenfolge vertauscht.

AM Metallstab, Gummiband schieben und ziehen

Erkenntnis: für starre Körper ist es belanglos, ob eine Kraft „vorne" oder „hinten" einfließt (z.B. Heck- oder Frontantrieb). Bei nicht starren Körpern ergeben sich Änderungen (z.B. Krafteingriff in Gewinden, Gummiband unter dem Einfluss von Druckkraft und Reibung). Andere Veränderungen wie Stabilität sind nicht Thema der Statik, siehe Definition.

Folgt aus den Axiomen Parallelogramm und Längsverschiebung.

Welches F_r haben diese beiden betragsmäßig gleich großen Kräfte?

Fr= 0, deshalb kann es in jedes System eingesetzt werden.

„Auf gleicher Wirklinie" folgt aus dem Längsverschiebungssatz.

Folgt aus den vorigen Axiomen und der Momentengleichung.

Vorgehensweise:

1 Kraft F oben eintragen
2 Kraft F und - F unten eintragen (Erweiterungssatz)
3 Moment einsetzen, ursprüngliche Kraft F und -F streichen.

Wird die Kraft auf ihrer Wirklinie ersetzt, entsteht kein Moment (Längsverschiebesatz).

Das Versatzmoment wirkt an jeder Stelle des Körpers

siehe oben, Kräftepaar am Beispiel Fahrradlenker.

Ültg: Tisch seitlich schieben: welche Wirkung von Kräften muss man auch in der Statik berücksichtigen?

Betrag und Richtung eines Momentes hängt von der Kraft und dem Bezugspunkt ab. Einheit Newtonmeter [Nm], nicht zu verwechseln mit Joule J=Nm: beim Drehmoment stehen Kraft und Weg rechtwinklig, bei der Arbeit parallel zueinander.

Die Richtung der Drehachse steht senkrecht auf der von Kraft und Hebelarm aufgespannten Ebene. In unserem Fall ist sie die z-Achse und kommt aus der Ebene heraus. Es gilt die

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.

Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit oä. im Spiel.

Einzelkräfte bewirken keine Drehung. Ohne Reibung, Lager o.ä. würden sie nur eine Verschiebung bewirken.

Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch jedes andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Ein Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, wenn beide das gleiche Drehmoment haben, z.B. doppelter Betrag und halber Abstand; gleiche Kräfte in anderer Ausrichtung.