



Statik – Festigkeitslehre – Getriebe

Unterrichtsplanungen für alle

Inhaltsverzeichnis

Register 1

Kräfte

Kraft und Beschleunigung.....	3
Newton 1: Trägheitsprinzip.....	
Newton 2: Aktionsprinzip.....	
Gewichtskraft.....	
Newton 3: Reaktionsprinzip.....	
Prinzip von d'Alembert.....	

Statik: Einführung

Statik.....	4
Definition, Zweck.....	
Vereinfachungen für die Schule.....	
Darstellungen von Kräften.....	
Rechnen mit Kräften in der Statik.....	
Gleichgewichtsbedingungen (allg.).....	
Die Hauptachsen im Raum.....	
Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D.....	
Aufgabe lösbar in der Ebene?.....	
Aufgabe lösbar am Punkt?.....	
Das Reaktionsprinzip und seine Folgen.....	

Register 2

Statik I: Zentrales Kräftesystem

Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln...5	
Zusammensetzen von Kräften.....	
0. Lageplanskizze.....	
1. Lageplan.....	
2. Kräfteplan.....	
3. Resultierende F_R / Gegenkraft F	
Zerlegen von Kräften.....	
4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen.....	
Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen.....	
Kräfte am Punkt berechnen.....6	
Zusammensetzen – systematische Lsg.....	
1. Lageplanskizze.....	
2. Koordinatensystem festlegen.....	
3. Tabelle der Kräfte erstellen.....	
4. Kräfte in Komponenten zerlegen.....	
5. Komponenten addieren.....	
6. Betrag $ F_R $ der Resultierenden.....	
7. Richtung α_R der Resultierenden.....	
Zerlegen - individuelle Lösung.....	
Rechtwinklige Dreiecke.....	
Beliebige Dreiecke.....	
Systematische Lösung – Zerlegen.....	
8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$	

Überleitung Statik I → Statik II

Resultierende Kraft in der Ebene berechnen.....8	
Anwendung.....	
Arbeitsplan.....	
1. - 7. F_R und α_R wie im zentralen KS.....	
8. Lage von F_G / F_R per $\Sigma M = 0$	
8a. Drehpunkt wählen.....	
7b. Momentengleichgewicht $\Sigma M = 0$	

Register 3

Freimachen

Freimachen von Körpern.....9	
Zweck.....	
Vorgehensweise.....	
1. Baugruppe wählen.....	
2. Alle Kräfte eintragen.....	
3. Bekannte Kräfte mit Richtung.....	
4. Unbekannte Kräfte.....	
5. Lösbarkeit prüfen.....	
6. Lageplanskizze anfertigen.....	

Hinweise auf Richtungen von Kräften.....	
Seile, Ketten usw.....	
Zweigelenstäbe (Pendelstützen).....	
Berührflächen.....	
Rollkörper.....	
Lose und feste Lager.....	
Einwertige Lager (Loslager).....	
Zweiwertige Lager (Festlager).....	
Dreiwertige Lager.....	

Statik II: Allgemeines Kräftesystem

Auflagerkräfte in der Ebene berechnen..11	
Arbeitsplan.....	
1. Freimachen + Lageskizze erstellen.....	
2. Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.).....	
3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen.....	
mögliche Vereinfachungen.....	
4. Momentengleichgewicht $\Sigma M =$	
5. Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen.....	
6. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$	
7. ggf. zusätzliche Gleichungen.....	
8. Gleichungssystem lösen.....	
9. Betrag und Richtung ermitteln.....	
10. Plausibilität prüfen.....	

Fachwerke.....14	
Rittersches Schnittverfahren.....	

Notizen.....14	
-----------------------	--

Register 4

Festigkeitslehre

Festigkeitsberechnungen.....15	
Kräfte ermitteln.....	
Äußere Kräfte: Freimachen (→ Statik).....	
Innere Kräfte: Freischneiden.....	
Beanspruchungsarten.....	
Belastungsfälle, Lastfälle.....	
Lastfall I: Ruhende Belastung.....	
Lastfall II: Schwellende Belastung.....	
Lastfall III: Wechselnde Belastung.....	
Überlagerte Spannungen.....	

Allzweckformel für Festigkeitslehre.....16	
Übersicht über die Formelgrößen.....	

Zugfestigkeit.....17	
Allzweckformel für Zugfestigkeit.....	
Festigkeitswerte σ_{grenz}	
Belastungsfall 1.....	
Belastungsfall 2.....	
Belastungsfall 3.....	
Sonderfälle.....	
Stahlseil mit Einzeldrähten.....	
iterative Rechnung.....	
(Rundglieder-)Kette.....	
Schrauben (Gewinde).....	

Druckfestigkeit.....17	
Allzweckformel für Druckfestigkeit.....	
Festigkeitswerte σ_{grenz}	

Scherung und Flächenpressung.....18	
Flächenpressung, Lochleibung.....	
Allzweckformel für Flächenpressung.....	
Festigkeitswerte p_{zul}	
Scherfestigkeit und Schneidkräfte.....	
Allzweckformeln für Scherung.....	
Festigkeitswerte τ_{grenz}	
Auswahl treffen.....	
Normzahlen.....	
Sonderfälle.....	
Lochleibung.....	
Passfedern.....	

Stanzten.....	
Rollen- bzw. Hülsenketten.....	
Flyerketten.....	

Biegefestigkeit.....19	
Biegemoment.....	
Biegespannung.....	
Spannungsverlauf im Biegequerschnitt.....	
Allzweckformel für die Biegefestigkeit.....	
Festigkeitswerte σ_{grenz}	
Biegetauglichkeit verschiedener Profile.....	

Biegehauptgleichung.....20	
Herleitung für ein Rechteckprofil.....	
Biegehauptgleichung.....	
(axiales) Widerstandsmoment W	
Herleitung für ein Rundprofil.....	
Herleitung im allgemeinen Fall.....	

Max. Biegemoment M_{bmax} ermitteln.....22	
Grafische Lösung.....	
Freimachen (Lageskizze).....	
Querkraftverlauf.....	
Biegemomente M_b aus Querkraftverlauf.....	
Biegemomentenverlauf.....	
Schlussfolgerungen für KA, Abi & Co.....	
Lösungsmöglichkeiten für M_{bmax}	
Rechnerische Lösung aus der Lageskizze.....	
Freischneiden (!).....	
Biegemomente M_b nach links oder rechts.....	
Formeln im Tabellenbuch: unbrauchbar.....	

Torsionsfestigkeit.....24	
Typische Aufgabe: Seilwinde.....	
Allzweckformeln für Torsionsfestigkeit.....	
Festigkeitswerte τ_{grenz}	
Verdrehwinkel.....	
Torsionshauptgleichung.....	
Herleitung für ein Rundprofil.....	
polares Widerstandsmoment W_p	

Register 5

Maschinenelemente für TG

Drehmoment- und Leistungsverhalten...25	
Laststeuerung eines Ottomotors.....	
Verbrauchskennfeld.....	
oder Muscheldiagramm.....	
Fahrverhalten ohne Schalten.....	
Fahrverhalten mit Schalten.....	
Schlussfolgerungen.....	

Übersetzungen.....26	
Bauarten.....	
Riementrieb.....	
Zahnradtrieb.....	
Transformator.....	
Größen.....	
Bestimmungsgrößen.....	
Übertragende Größen.....	
Übertragung ohne Verluste.....	
Übersetzung i ohne Verluste.....	
Übersetzung mit Verlusten.....	

Register 6

Wälzlager, Konstruktion & Co

Wiederholung Statik mit Aufgaben zu Wälzlager und Konstruktion.....27	
tgtm HP 2014/15-4 Antriebseinheit.....	
technische Diagramme.....	
Wälzlager: Lagerarten, Radiallast, Axiallast, Lebensdauerstreukurve.....	
Zahlenwertgleichungen.....	
Leitertafel.....	
Gewöhnung an tgtm-Aufgaben.....	
tgtm HP 2013/14-1: Hängeförderer.....	
Wälzlager ermitteln (Wdhg.).....	
Tausendertrennzeichen.....	



Projektionsmethoden (Wdhg.).....	
Gewöhnung an tgtm-Aufgaben.....	
Fest- und Loslager.....	
Punkt- und Umfangslast.....	
Lagerung einzeichnen.....	
tgtm HP 2012/13-1: Hebevorrichtung.....	
Statik I extrem.....	
Wälzlager ermitteln (Wdhg.).....	
unklare Zeichnung.....	
Prinzipskizze.....	
Zähnezahlen für mehrstufiges Getriebe.....	
tgtm HP 2007/08-3: Rollenhalterung.....	
Extrem-Konstruktion.....	
	Register 9

Formelsammlung

Register 9

Abi-Aufgaben tgtm

Register 10

Sonstiges: Statik

Verkürzte Einführung in die Statik.....	29
Allgemeines.....	
Zeichnerische Darstellung von Kräften.....	
Vorgehensweise beim Zusammensetzen.....	
1. Lageplan (Freileitungsmast).....	
2. Kräfteplan $M_K: 1200\text{ N} \approx 60\text{ mm}$	
3-Kräfteverfahren.....	30
Anwendung.....	
Arbeitsplan.....	
0. Lageplanskizze.....	
1. Lageplan.....	
2. Kräfteplan.....	
Lösungsgedanke.....	
4-Kräfteverfahren.....	30
Anwendung.....	
Arbeitsplan.....	
1. Lageplan.....	
2. Kräfteplan.....	
Lösungsgedanke.....	
Hinweise zur Konstruktion.....	
Schlusslinienverfahren (Auflager zeichnerisch ermitteln).....	32
Anwendung.....	
Arbeitsplan.....	
1. Lageplan.....	
2. Kräfteplan.....	
3. KP: Anschluss der unbekannten Kräfte festlegen.....	
4. KP: Pol P wählen.....	
5. KP: Polstrahlen einzeichnen.....	
6. LP: Seilstrahlen übertragen.....	
7. LP: Schlusslinie eintragen.....	
8. KP: Schlusslinie übertragen.....	
9. KP vervollständigen.....	
Lösungsgedanke.....	
Schlusslinienverfahren in Bildern.....	
Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten Beträgen.....	35
Anwendung.....	
Besonderheiten bei 3 WL.....	
Seileckverfahren.....	36
Anwendung.....	
Prinzip.....	
Beispiel.....	
Kombination aus SEV und 4KV.....	36
Anwendung.....	
Arbeitsplan.....	
Kräfte mit SEV zusammenfassen.....	
Resultierende mit 4KV zerlegen.....	
Grundoperationen der Statik.....	37

1. Kräfteparallelogramm.....	
2. Längsverschiebung.....	
3. Erweiterungssatz.....	
4. Parallelverschiebung.....	
(Kraft-)Moment einer Einzelkraft.....	
Definition.....	
Kräftepaare.....	
Drehmoment, Hebel.....	38
z.B. Schraubenschlüssel.....	
z.B. Fahrradpedal.....	
Gleichgewichtsbedingungen.....	
z.B. Schubkarre.....	
z.B. Wippe.....	
Kräftepaare.....	
Reibung.....	39
Einflüsse auf die Reibung haben.....	
Normalkraft.....	
Werkstoffpaarung.....	
Oberflächengüte.....	
Schmierzustand.....	
Reibungsart.....	
Berechnung.....	
Haft- und Gleitreibung.....	
Rollreibung.....	
Gleit- oder Wälzlager.....	
Schiefe Ebene.....	40
Kräfte.....	
Steigung in %.....	
Hangabtriebskraft F_H	
Normalkraft F_N	
Bewegung.....	
Reibwinkel.....	
Auflager.....	

Sonstiges: Festigkeitslehre

Zugversuch.....	41
Zweck.....	
Durchführung.....	
Zugprobe.....	
Ablauf.....	
Standardisierung.....	
Zugkraft $F \leftrightarrow$ Zugspannung σ_z	
Längenänderung $\Delta L \leftrightarrow$ Dehnung ϵ	
Spannungs-Dehnungs-Diagramm.....	
mit ausgeprägter Streckgrenze.....	
ohne ausgeprägte Streckgrenze.....	
Vorgänge im Werkstoff.....	
elastische Verformung.....	
Einschwingverhalten.....	
plastische Verformung.....	
Kaltverfestigung.....	
Einschnürung.....	
Kennwerte aus dem Zugversuch.....	
Streckgrenze R_e – Dehngrenze $R_{p0,2}$	
(Der) Elastizitätsmodul E	
Zugfestigkeit R_m	
Bruchdehnung $A (=A_5)$ oder A_{10}	
Brucheinschnürung Z	
Streckgrenzenverhältnis V_S	
Bruchdehnung $A_5 \leftrightarrow A_{10}$	
Zusammenhang zwischen A_5 , A_{10} und A_g	
Zugversuch im Mindmap.....	44
Festigkeitsberechnung in Kurzform.....	45
Zugversuch.....	
Spannungs-Dehnungsdiagramm.....	
Werkstoffkennwerte σ_{lim}	
Auslegung von Bauteilen.....	
Kennwerte vom Zugversuch übertragen	46
Belastungsarten.....	
Zugbeanspruchung.....	
Druckbeanspruchung.....	
(Flächenpressung).....	
Abscherung.....	
Biegespannung.....	

Torsionsbeanspruchung.....	
Belastungsfall.....	
Abhängig von.....	
Andere Beispiele für Faktoren.....	
Lastwechsel (Wöhlerkurve).....	
Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith.....	

Knickfestigkeit.....	47
zulässige Knickkraft.....	

Sonstiges: Maschinenelemente

Vergleich Wälzlager Gleitlager.....	
Gleitlager.....	
Wälzlager.....	
Wälzlager.....	48
Aufbau.....	
Bauarten und Eigenschaften.....	
Rillenkugellager.....	
Zylinderrollenlager.....	
Pendelrollenlager.....	
Toroidalrollenlager.....	
Auswahlkriterien.....	
Ähnliche Maschinenelemente.....	
Schmierung.....	
Ein- und Ausbau.....	
Lageranordnung.....	
Sonstiges.....	
Gleitlager.....	49
Reibungszustände.....	
trockene Festkörperreibung.....	
Mischreibung.....	
Flüssigkeitsreibung.....	
tragender Schmierfilm hängt ab von.....	
Bauarten.....	
Hydrodynamische Lager.....	
Hydrostatische Lager.....	
Werkstoffe für Gleitlager.....	
Sinterlager.....	
Gleitlagerbuchsen.....	
Eigenschaften für Lagerwerkstoffe.....	
Verbundgleitlager.....	
Mechanische Getriebe.....	50
Aufgabe.....	
Nicht schaltbare Getriebe.....	
Getriebe mit gestufter Übersetzung.....	
Schieberädergetriebe.....	
Kupplungsgetriebe.....	
Getriebe mit stufenloser Übersetzung.....	
Sonstige.....	
hydrodynamische Drehmomentwandler.....	
Riementreibe.....	51
Merkmale.....	
übertragbares Drehmoment.....	
Bauarten.....	
Flachriemen.....	
Keilriemen.....	
Synchronriemen (Zahnriemen).....	
Rundriemen.....	
Mehrkeilriemen, Keilrippenriemen.....	
Zahnradarten.....	52
Aufgaben.....	
Verzahnungsarten.....	
Zykloidenverzahnung.....	
Evolvertenverzahnung.....	
Triebstockverzahnung.....	
Kammverzahnung.....	
Verzahnungsrichtung.....	
Geometrie.....	
Fertigung einer Evolvertenverzahnung.....	
Profilfräsen.....	
andere.....	
Unterschneidung.....	
Profilverschiebung.....	
Literaturverzeichnis.....	54



Kräfte

Zusammenhang zw.

Kraft und Beschleunigung

Die 3 Prinzipien Trägheit, Aktion und Reaktion entsprechen den 3 Newtonschen Axiomen [Tipler 1995]. Das 1. Axiom wurde schon von Galilei gefunden [Böge, Techn. Mechanik].

Newton 1: Trägheitsprinzip

(1. Newton'sches Axiom) Das Trägheitsgesetz meint den Zustand ohne zusätzliche Kräfte, bei dem ein Körper träge in seinem Bewegungszustand verharrt [1].
Sir Isaac Newton (*1642 - †1726) war einer der bedeutendsten Wissenschaftler.
Der Zusammenhang wurde schon 1638 von Galilei formuliert → [Gross 2015] S.36

Ohne Kraft keine Bewegungsänderung (= Trägheit)

↔ Bewegungsänderung benötigt Kraft

Bewegungsänderung = Beschleunigung

- = Beschleunigen (umgangssprachlich)
- = Bremsen (= negative Beschleunigung)
- = Kurvenfahren (= Fliehkraft, Querschleunigung)

Newton 2: Aktionsprinzip

(oder dynamisches Grundgesetz)

(2. Newton'sches Axiom): Je größer die Masse und je größer die Beschleunigung ist, desto größer ist die (result.) Kraft und umgekehrt:

Kraft = Masse · Beschleunigung

$$F = m \cdot a$$

$$[N] = [kg \frac{m}{s^2}]$$

Gewichtskraft

Die Erde beschleunigt alle Körper gleich

$$F_G = m \cdot g \quad \text{Gewichtskraft}$$

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2} \approx 10 \frac{m}{s^2} \quad \text{Erdbeschleunigung, Ortsvektor}$$

das bedeutet:

$$10 N \approx 1 kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{bzw.} \quad 10 N \approx 1 kg$$

Newton 3: Reaktionsprinzip

(= Wechselwirkungsgesetz, actio = reactio)

(3. Newton'sches Axiom)

Kräfte treten immer paarweise auf (Kraft + Gegenkraft)

[Gross 2015]: Zu jeder Kraft gibt es stets eine entgegengesetzt gerichtete gleich große Gegenkraft.

Überlegungen zum Freimachen – hier nicht unterrichten

Da sich Kräftepaare immer aufheben, d.h. in der Summe 0 ergeben, bringt es nichts, mit Kräftepaaren zu rechnen. Vielmehr ist es Sinn des Freimachens, Kräftepaare aufzubrechen und nur mit einer der beiden Kräfte zu rechnen. Die Frage ist, mit welcher der beiden Kräfte man rechnen soll.

Prinzip von d'Alembert

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (*1717 - †1783 in Paris) war ein bedeutender Physiker und Mathematiker und ein Herausgeber der Encyclopédie.

Wenn ein System statisch nicht im Gleichgewicht ist, wird es von der Resultierenden beschleunigt und $F = m \cdot a$ wird dynamische Gegenkraft.

Damit können Aufgaben der Dynamik mit Verfahren der Statik gelöst werden.

Vertiefung

Aktionsprinzip „Kraft = Masse mal Beschleunigung“ →

$$[N] = [kg \frac{m}{s^2}] \rightarrow 1 \frac{m}{s^2} = 1 \frac{N}{kg}$$

→ 1 N beschleunigt 1 kg mit 1 m/s²

→ 9,81 N beschleunigt 1 kg mit Erdbeschleunigung

FTM, MVK: ca. 90' Zeitbedarf (ca. 45' ohne Übungen); TG: entfällt

Sir Isaac Newton (*1642 - †1726) war einer der ganz großen Wissenschaftler. Kurz vor seinem Tod hat er nachweislich 4 Personen die Anekdote vom fallenden Apfel erzählt, der ihn auf die Schwerkraft gebracht haben soll. Dadurch weiß man zwar nicht, ob die Geschichte stimmt, aber, dass Newton wollte, dass die Geschichte bekannt wird. Ob Newton damit u.a. auf die biblische Frucht der Erkenntnis anspielen wollte? Oder das Gegenteil?

AM Kreidekästchen auf einer hochgelegenen Fläche

1) Was wird benötigt, das Kreidekästchen zu bewegen? → Kraft
Bei Antworten wie Finger o.ä.: Es geht auch ohne Finger.

Demo: Kreidekästchen mit Finger (= Kraft) anschubsen

2) Wie lange bleibt die Bewegung erhalten? → ohne Reibung ewig
Viele Schüler meinen aus der Erfahrung mit der allgegenwärtigen Reibung, dass Bewegung nur aufrechterhalten wird, solange eine Kraft wirkt. Zur Demo:

Demo: Pendel (Taschenmesser) pendelt nach einem Schub sehr lange

3) Wodurch wird die Bewegung verlangsamt? → durch Reibung

4) Wie lange dauert eine Bewegung ohne Reibung oder Antrieb?

5) Vertiefung: Wie kann man beschreiben, was Beschleunigung ist? Bei welchen 3 Gelegenheiten übt ein Kfz Kraft auf die Mitfahrer aus? → Beschleunigen, Bremsen, Kurvenfahrt

1) Ist die Beschleunigung eines Porsche und eines 38t bei gleicher Kraft (Drehmoment) gleich groß? → hängt noch von der Masse ab

2) Einheit m/s²: Ein Kfz beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 5s:

Folgerung: Ein Porsche beschleunigt am schnellsten, wenn man ihn fallen lässt. Das erste s kommt aus der Geschwindigkeit (= Änderung des Weges pro Zeit), das 2. s aus der Änderung der Geschwindigkeit (pro Zeit).

P = Impuls. Die Formulierung Newtons war weitsichtig. Er hat nicht nur die Beschleunigung mit dv/dt umfassender formuliert, sondern auch andere Möglichkeiten, z.B. Kräfte durch Umlenkung von Fluidströmen: $F = \dot{m} \cdot v$. Gemäß Relativitätstheorie erhöht F nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Masse; messbar wird es erst bei sehr großen Geschwindigkeiten.

1) Kreidekästchen in der Luft halten, Loslassen andeuten: welche Kraft wirkt auf das Kreidekästchen, wenn man es loslässt? → Gewichtskraft

Versuch unterschiedlich schwere Gegenstände (z.B. Kreide/Papier) in die Luft halten

2) Wenn die Erde auf beide Körper dieselbe Gewichtskraft ausübt, welcher Körper müsste schneller fallen? → der Leichtere, weil seine kleine Masse durch dieselbe Kraft mehr beschleunigt wird (s.o.)

3) Welcher fällt schneller und warum? → ohne Luftwiderstand keiner

Vers.: Fallen von ähnlich großen Körpern verschiedenen Gewichts, z.B. Messer und Kreide
AM Röhre mit Vakuum

4) Vgl. $F = ma$: wenn verschiedene Massen gleich beschleunigt werden, übt dann die Erde eine konstante Kraft auf uns? → nein, aber Erdbeschleunigung ist konstant.

Nicht nur der Vollständigkeit halber, sondern zur Vorbereitung des Problems, in welche Richtung Kräfte wirken.

1) Kreidekästchen in der Luft fällt wegen der Erdbeschleunigung. Warum fällt das Kreidekästchen auf dem Tisch nicht? Warum wird ein Auto bei konstant 100 km/h nicht schneller, obwohl der Motor ständig Kraft aufbringt? → Gegenkraft

→ Nach der üblichen Richtungsdefinition betrachten wir die Kräfte, die vom Rest der Welt auf den freigemachten Körper wirken.

Man könnte auch mit den Kräften rechnen, die vom freigemachten Körper auf den Rest der Welt wirken. Dieses System würde nur die Vorzeichen umdrehen, und somit auch die Richtung der Schwerkraft: Newtons Apfel würde als freigemachter Körper an der Erde ziehen. Physikalisch ist das sogar richtig, aber für uns fehlerträchtig ungewohnt.

Die Resultierende Kraft ist diejenige, die das System beschleunigt, die dynamische Kraft ist die Trägheitskraft des Systems.

Damit ist die Aufnahmekapazität der Schüler meist erreicht. Gewichtskraftberechnungen dienen hier der Abwechslung und, da sie relativ einfach sind, kann man gleichzeitig auf andere Themen übergreifen.

Vertiefung

MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 495..514

Sind gleichzeitig eine passende Überleitung vom Fach Dynamik

Statik_TA_Kraft-Beschleunigung.odt



Statik: Einführung

Statik

Definition, Zweck

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in Körpern, die in Ruhe oder konstanter geradliniger Bewegung sind. Ihre Ergebnisse sind Grundlage der Festigkeitsrechnung.

Vereinfachungen für die Schule

- alle Körper sind starr
- Reibung wird meist vernachlässigt
- nur 2D-Probleme (in der Ebene)
- Kräfteingriff wird auf Punkte reduziert

Darstellungen von Kräften

Kräfte sind Vektoren und gekennzeichnet durch

- Betrag und
- Richtung (Wirklinie WL und Richtungssinn)

$F=10\text{N}$ nur Betrag ohne Richtungsangabe
zeichnerisch, Betrag wird durch die Länge dargestellt, Richtung durch sich selbst.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 3\text{ N} \\ 4\text{ N} \end{bmatrix} = [53,1^\circ; 5\text{ N}]$$

Rechnen mit Kräften in der Statik

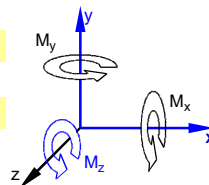
Aus $F = m \cdot a$ und $a=0$ (Statik!) folgt:

Gleichgewichtsbedingungen (allg.)

$$\Sigma F = 0$$

Die Hauptachsen im Raum

(Pfeilrichtung ist +)



Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D

Aus $F = m \cdot a$ und $a=0$ (Statik!) folgt (2D bzw. 3D):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

Gelten für jedes Teil und jedes Koordinatensystem.

Aufgabe lösbar in der Ebene?

Für TG liegen alle Kräfte in einer Ebene:

→ es gelten 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma M = 0$$

Nur 3 unbekannte Größen (Kraftbeträge, Krafrichtungen, Momente) können gelöst werden.

Wer mehr Unbekannte hat, muss weitere Informationen suchen oder die Aufgabe überspringen

Aufgabe lösbar am Punkt?

Im zentralen KS wirken alle Kräfte durch einen Punkt

→ ohne Hebelarme wirken keine (Dreh-)Momente

→ es gelten nur noch 2 Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0$$

Im zentralen KS sind nur noch 2 Größen lösbar, z.B.

- eine Kraft nach 1 Betrag und 1 Richtung oder
- 2 Kräfte mit bekannter Richtung

Das Reaktionsprinzip und seine Folgen

Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio)

Um mit Kräften rechnen zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen → Freimachen

Vertiefung: keine

FTM, TG-ja; MVK: entfällt

FO Steinmetz-Meisterprüfung, Nürnberg ca.1570 ([SdW] 11/91)

FO Freiburger Münster [BadZtg] 30.11.2014

1) Welche Fachgebiet muss man heutzutage dazu beherrschen? Statik
Verfahren der Alten: Erfahrung und Ästhetik (=Theorie?) wurden in Regeln umgesetzt.

2) Warum lassen wir am TG die konstante geradlinige Bewegung nicht zur Vereinfachung weg?

Konstante geradlinige Bewegung kann man von Ruhe gar nicht unterscheiden – z.B. fliegen wir ziemlich schnell um die Sonne.

3) Was wird in der Statik betrachtet? Kräfte.

4) Welche Wirkungen haben Kräfte?

Bewegungs- (Thema der Kinetik, wie Statik ein Teilgebiet der Dynamik) oder Formänderungen (meist vernachlässigt): Ideal starre Körper erfahren keine Formänderung durch Kräfte, sodass sich die Kraftangriffspunkte nicht verschieben.

Ursache für Kräfte? $F = m \cdot a$; $F = E \cdot \Delta x / \epsilon$, Reibung (meist vernachlässigt) usw.

5) Was muss man von einer Kraft wissen, wenn man mit ihr rechnen will?

Auf den Tisch setzen ($\approx 1\text{kN}$), Tisch schieben, am Tisch ziehen.

Der Angriffspunkt der Kraft ist zwar auch wichtig, aber keine der Kraft innewohnende Eigenschaft. Wirklinie ist die Verlängerung des Kraftvektors in beiden Richtungen, Richtungssinn ist die Richtung des Kraftvektors auf der WL.

Bedeutung der Krafrichtung: Man möge versuchen, ein Auto seitwärts anzuschieben.

Müsste genauer $|F| = 10\text{ N}$ heißen! Einheit Newton [N] = $\text{kg m} / \text{s}^2$

vektoriell, schließt die Richtung ein

1) Um wie viele Prozente wird die Rechnung von vereinfacht bei der Reduktion von 3D auf 2D?

FO Flieger

3D bedeutet 3 Kräfte und 3 Momente, 2D nur 2 Kräfte und 1 Moment, d.h. die Vereinfachung beträgt 50%.

In der Ebene fallen F_z , M_x und M_y weg; Danach ist die Indizierung von M nicht mehr nötig, weil keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.

Dreifingerregel: Koordinatensystem mit Daumen (x-Achse), Zeigefinger (y-Achse) und Mittelfinger (z-Achse) der rechten Hand aufspannen.

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

2) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen?

Die zeichnerischen Lösungen beruhen auf denselben Gleichgewichtsbedingungen!

Drehen um die Querachse: Nicken, Stampfen, früher auch Galoppieren ([SdW] 08/2015 S.111)

Im Einzelfall kann es sinnvoll sein, auch andere Krafrichtungen oder Drehpunkte außerhalb des betrachteten Körpers zu wählen.

3) Wie viele Unbekannte können mit 6/3 Gleichungen gefunden werden?

Mit 3 Gleichungen kann man 3 unbekannte Kräfte ermitteln (statische Bestimmtheit).

Als statisch bestimmtes ebenes System bezeichnet man einen Körper, der so gelagert ist, dass nur drei unbekannte Auflagerreaktionen angreifen.

Beispiel: Eine Lagerung mit Fest- und Loslager ist statisch bestimmt, eine Lagerung mit 2 Festlagern ist überbestimmt.

Statisch überbestimmte System (mehr Auflagerreaktionen möglich) erfordern weitere Gleichungen zur Lösung (z.B. Dehnung durch Kraft oder Wärme bei zwei Festlagern).

Weniger Auflagerreaktionen heißt einfach, dass das Teil lose ist.

Die statische Bestimmtheit muss in jeder Raumrichtung erfüllt sein.

Fundsachen

Deckenlasten: [Schneider21] S.3.22f: Es werden nicht nur Flächenlasten (Schnee, Wind, Lagersgut, ...) berücksichtigt, sondern ggf. Faktoren bei Hubschrauberlandeplätzen, Regelbetrieb bei Gegengewichtstaplern, Böengeschwindigkeitsdruck ... S.3.49: Schneelast: Lörrach gehört zur Zone 2 (Hochschwarzwald 2a = höchste Stufe). Formel (A = Geländehöhe in [m]):

$$S_{U1} = 0,25 + 1,91 \cdot \left(\frac{A + 140}{760} \right) \geq 85 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Brücken: [Schneider21] S.3.59: Anpralllasten (Fahrzeuganprall an Brückenpfeiler), S.3.63 Schwingungsbeiwert für Hauptspur.

Erdbeben: [Schneider21] S.3.66f: Lörrach gehört zur höchsten Erdbebenzone 3v

4) Tauziehen mit je 5kN (500kg): Zugkraft im Tau?

Die Zugkraft beträgt 5kN und nicht etwa das Doppelte, denn Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio). Die Kräftepaare addieren sich nicht, sondern heben sich auf, und erfüllen so die Gleichgewichtsbedingung trivial und nutzlos. Um die Gleichgewichtsbedingungen anwenden zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen und betrachtet dann alle Kräfte, die von außen auf eine beliebige Baugruppe wirken. Das Verfahren heißt Freimachen und wird unten behandelt.



Statik I: Zentrales Kräftesystem

Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln

Statik I → Zentrales Kräftesystem → alle Kräfte wirken durch einen Punkt → keine Hebelarme
→ Es treten keine Momente auf → Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ entfällt → nur 2 unbekannte Größen sind lösbar.
[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

Zielgruppe: alle

Angewendet werden die statischen Grundoperationen Parallelogramm, Erweiterungssatz, Verschiebesatz. Die ausgeführten Beispiele stammen aus der ersten Quelle:

ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik_Ub_zentral.pdf

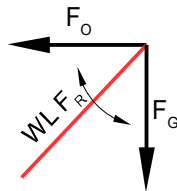
[Müller-Breslau I] S.1: „Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht befinden.“

Zusammensetzen von Kräften

TG: Aufg. 1a, Oberleitungsrolle;
MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.]
Aufgabe 29 (Richtung definieren)
LS Seilrolle

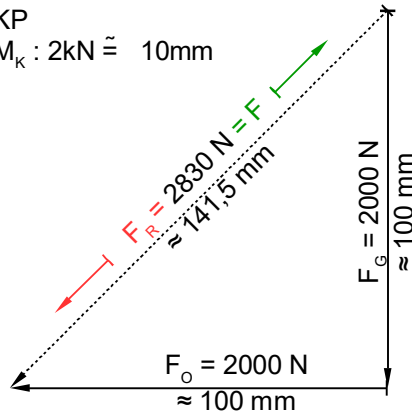
LP Seilrolle

M_L : noch nicht nötig



KP

M_K : $2\text{ kN} \approx 10\text{ mm}$



Arbeitsplan

Ergebnis abschätzen Welche Kräfte wirken überhaupt ?

0. Lageplanskizze

= Lageplan ohne formelle Regeln
→ hält den Kopf frei für das Problem

1. Lageplan

Geeignete Baugruppe auswählen, nennen und alle auf die Baugruppe wirkenden Kräfte einzeichnen
– Wirklinien winkeltreu
– Richtungen: wie wirkt RdW auf BG
– Angriffspunkte lagetreu (Lagemaßstab): (nur wenn zeichn. Lösungen für das allg. Kräftesystem im Lehrplan stehen)

2. Kräfteplan

Kräfte eintragen
– maßstabsgerecht (Kräftemaßstab)
– hintereinander als Pfeilkette
– winkeltreu (Parallelverschiebung)

3. Resultierende F_R / Gegenkraft F

F_R (Ersatzkraft) ist die 'Abkürzung im KP' und ersetzt die gegebenen Kräfte F schließt das Krafteck und hält die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht.

Ausmessen, umrechnen mit M_K .

Plausibilitätsbetrachtung

Arbeitsplan kann auch Algorithmus, Kochrezept, Arbeitsanweisung, Vorgehensweise oder neudeutsch Workflow heißen.

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 .. 1/3 der Punktzahl. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageskizze.

Kräfte eintragen, wo sie wirken.

Der Lageplan ist die zeichnerisch-formale Fassung von "Gegeben und Gesucht".
Im allgemeinen Kräftesystem fließen über den Lagemaßstab der Abstand der Kräfte und damit die Momente ein. Beim zentralen System erübrigt sich das Eintragen der Angriffspunkte, da sie alle an einem Punkt angreifen.
Unbekannte VL können wie gezeigt oder für rechn. Lösungen mit x- und y-Komponenten dargestellt werden.
Richtung: Wie wirkt der Rest der Welt auf die Baugruppe.

Kräfte → geschlossener Linienzug.

Der Kräfteplan ist das Lösungsverfahren und sollte streng vom LP unterschieden werden. Deshalb akzeptiere ich auch keine Parallelogramme, die bei 2 Kräften noch möglich wären. Die Richtungen sollen per **Parallelverschiebung** übertragen werden, weil es dabei deutlich weniger Fehler gibt. Die gegebenen Kräfte werden richtungsgemäß und maßstabsgerecht so aneinander gereiht, dass sich ein fortlaufender Kräftezug ergibt. Anfangspunkt und Reihenfolge der Kräfte sind beliebig.

Ob die Resultierende oder die Gegenkraft gefragt ist, hängt von der Aufgabe ab. Beide sind gleich groß, aber entgegengerichtet.
Die Resultierende ist die Kraft, die die gegebenen Kräfte ersetzen kann. Beispiel: Wenn auf ein Fahrzeug Antriebskräfte, Luftwiderstand und Rollreibung wirken, kann man diese zusammenfassen und mit der Resultierenden die Beschleunigung zu ermitteln.

Plausibilität: Kann das stimmen?

Vorher Ergebnis abschätzen und nachher Plausibilitätsbetrachtung gehören zu jeder Aufgabe.

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 30ff (30 definiert Winkelangabe)

Vertiefung

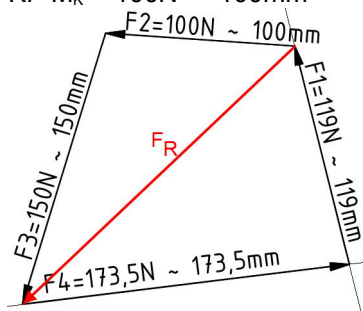
TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM]

Zerlegen von Kräften

TG: Aufg. 4a: Eimerziehen2; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 40f (L), 44f

LP siehe Aufgabe

KP $M_K = 100\text{ N} \hat{=} 100\text{ mm}$



Arbeitsplan

0-3 wie oben (bek. Kräfte addieren)

4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen

– WL einer Kraft parallel verschieben durch den Anfang von F_R und
– WL der anderen Kraft parallel verschieben durch den Endpunkt von F_R .
– Die unbekannten Kräfte werden durch den Schnittpunkt begrenzt.
– Richtung der Kräfte einheitlich (mit / gegen Uhrzeigersinn)

Ültg: Aufgabe 3 ist grundsätzlich neu, da nicht eine Kraft gesucht wird, sondern zwei.

Zu diesem Verfahren müssen die Kraftrichtungen bekannt sein. Hinweise auf die Kraftrichtungen hat man bei Seilen, Ketten, Zweigelenkstäben, einwertigen Lagern usw. Wenn die Kraftrichtungen nicht bekannt sind, müssen die Drehmomente eingerechnet werden, dies geschieht zeichnerisch im Schlusslinienverfahren.
Drei und mehr unbekannte Kräfte sind ohne Randbedingungen nicht lösbar.

F_R muss im Kräfteplan nicht eingetragen werden.

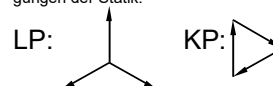
Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 49ff.

Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Rittersche Schnittverfahren verwendet werden.

Der geschlossene Linienzug aller Kräfte ist der graphische Ausdruck der Gleichgewichtsbedingungen der Statik.



(Stern ↔ Dreieck ;-)

Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen

Alle Kräfte, die sich im Lageplan in einem Punkt treffen, ergeben im Kräfteplan einen geschlossenen Linienzug.



Kräfte am Punkt berechnen

[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

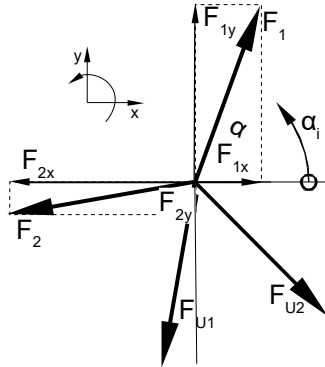
Zusammensetzen – systematische Lsg.

(ohne KP)

TG: FTM; UB Statik zentral 4a: Mobile Antenne; MVK: [EuroRBM]

Geg: F_1 ; F_2 ; Ges.: F_R ; F_3 ; F_4

Lageskizze mobile Antenne



$$\begin{aligned} F_{1x} &= F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \cos 70^\circ = 85,51 \text{ N} \\ F_{1y} &= F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \sin 70^\circ = 234,92 \text{ N} \\ F_{2x} &= F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 200 \text{ N} \cdot \cos 190^\circ = -196,96 \text{ N} \\ F_{2y} &= F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 200 \text{ N} \cdot \sin 190^\circ = -34,73 \text{ N} \\ F_{Rx} &= +F_{1x} + F_{2x} = 85,51 \text{ N} + (-196,96 \text{ N}) \\ &= -111,45 \text{ N} \\ F_{Ry} &= +F_{1y} + F_{2y} = +234,92 \text{ N} + (-34,73 \text{ N}) \\ &= 200,19 \text{ N} \\ F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 229,1 \text{ N} \\ &= \sqrt{(-111,45 \text{ N})^2 + (200,19 \text{ N})^2} \\ \alpha'_R &= \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{200,19 \text{ N}}{-111,45 \text{ N}} = -60,9^\circ \\ &\text{nach links oben} \\ \alpha_R &= \alpha'_R + 180^\circ = -60,9^\circ + 180^\circ = 119,1^\circ \\ &\text{zur } +x\text{-Achse} \end{aligned}$$

Zerlegen - individuelle Lösung

= Durchwursteln anhand des Kräfteplans

Rechtwinklige Dreiecke

Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Komponenten.

Beliebige Dreiecke

Kräfteplanskizze mit der bekannten Kraft F_R und den Wirklinien der unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2}

Beispiel:

[Böge Aufg.] Aufg. 51

$$\begin{aligned} F_{U1} &= F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U1}}{\sin \beta_R} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{\sin 15,9^\circ}{\sin 125^\circ} = 76,6 \text{ N} \\ F_{U2} &= F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U2}}{\sin \beta_R} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{\sin 39,1^\circ}{\sin 125^\circ} = 176,4 \text{ N} \end{aligned}$$

Vertiefung

FTM, MVK: kein Zerlegen. TG: volles Programm

Arbeitsplan:

1. Lageplanskizze
2. Koordinatensystem festlegen
3. Tabelle der Kräfte erstellen

Alle Winkel α von der x-Achse (ccw)!

	$ F $ [N]	α [°]	F_x [N]	F_y [N]
F_1	250,0	70,0	85,5	234,9
F_2	200,0	190,0	-197,0	-34,7
F_R	229,1	119,1	-111,5	200,2
F_{U1}	76,6	260,0	-13,3	-75,4
F_{U2}	176,5	-45,0	124,8	-124,8
Kontrolle: $\Sigma =$			0,0	0,0

4. Kräfte in Komponenten zerlegen

Komponenten = Kraftanteile in Koordinatenrichtungen

$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n; \quad F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$$

5. Komponenten addieren

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots; \quad F_{Ry} = \Sigma F_{ny}$$

6. Betrag $|F_R|$ der Resultierenden

$$|F_R| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

7. Richtung α_R der Resultierenden

arctan liefert zweideutige Werte \rightarrow Winkel muss präzisiert werden:

– Vorzeichen der Komponenten

Skizze !!

oder

– α ab +x-Achse angeben

Für $F_{Rx} \geq 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R$

Für $F_{Rx} < 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R + 180^\circ$

Prinzip:

8. Lageplanskizze

9. Kräfteplanskizze

10. Kräfte mithilfe KP und Winkelfunktionen berechnen

Winkelfunktionen

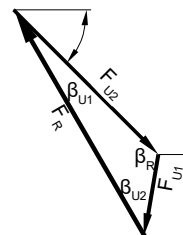
$$F_{Rx} = F_R \cdot \cos \alpha_R$$

$$F_{Ry} = F_R \cdot \sin \alpha_R$$

[Böge Aufg.] Aufg. 42f

Sinussatz

$$\frac{F_R}{\sin \beta_R} = \frac{F_{U1}}{\sin \beta_{U1}} = \frac{F_{U2}}{\sin \beta_{U2}}$$



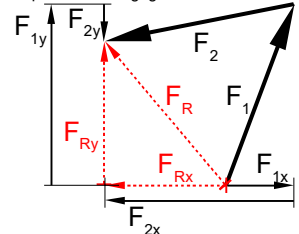
Dieser programmierfähige Algorithmus spart fehlerträchtige Überlegungen und übt alle nötigen Techniken ein:

5) Freimachen

Freimachen ist bei allen Statikaufgaben unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine Skizze. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageskizze.

6) Komponenten

Skizze: Die Komponenten von F_R setzen sich aus den Komponenten der gegebenen Kräfte zusammen.



7) Winkelangaben

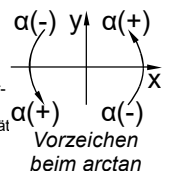
Alle Winkel α ccw (= counter clock wise = gegen den Uhrzeigersinn) von derselben (x-)Achse \rightarrow Vorzeichen der Komponenten ergeben sich automatisch \rightarrow weniger Fehler.

Für die Zerlegung in Komponenten muss man genau einmal überlegen, ob man sin oder cos einsetzen muss, danach läuft alles automatisch. Alle x-Komponenten erhalten das eine, alle y-Komponenten das andere. Die Vorzeichen der Komponenten ergeben sich wegen des einheitlichen Bezuges der Winkel auf die x-Achse automatisch.

Komponenten addieren ergibt die Komponenten der Resultierenden F_R . F_n meint den Betrag der n-ten Kraft α ist der Winkel von der x-Achse gegen den Uhrzeiger bis zur Kraft. Vorzeichen von F_{nxy} ergeben sich automatisch.

Betrag mit Pythagoras aus den Komponenten berechnen.

Die genaue Richtung α_R bekommt man mit den Komponenten F_{Rx} und F_{Ry} heraus, da rentiert sich kein Algorithmus. Statt Regeln auswendig zu lernen, sollte man das Problem erkennen und nach Plausibilität lösen.



– α ab +x-Achse angeben

Wenn $F_{Rx} \geq 0 \rightarrow \alpha_R$ zählt ab der +x-Achse

Wenn $F_{Rx} < 0 \rightarrow \alpha_R$ zählt ab der -x-Achse

Für einfache Aufgaben braucht man keinen komplizierten Algorithmus. Oft genügt es, den Kräfteplan zu skizzieren und dann die gesuchten Kräfte mit ein paar Winkelfunktionen zu berechnen. Für individuelle Lösungen muss der Arbeitsplan zwangsläufig sehr allgemein gehalten sein

Das Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Kräfte ist häufig notwendig und muss von jedem Schüler beherrscht werden.

Skizze mit Werten der Beispielaufgabe

Winkel für das Beispiel:

$$\beta_{U1} = 180^\circ - \alpha_R + \alpha_{U2} = 180^\circ - 119,1^\circ - 45^\circ = 15,9^\circ$$

$$\beta_{U2} = \alpha_R - (\alpha_{U2} - 180^\circ) = 119,1^\circ - (260^\circ - 180^\circ) = 39,1^\circ$$

$$\beta_R = (\alpha_{U1} - 180^\circ) - \alpha_{U2} = (260^\circ - 180^\circ) - (-45^\circ) = 125^\circ$$

$$\text{Kontrolle: } 15,9^\circ + 39,1^\circ + 125^\circ = 180^\circ$$

Auch die Berechnung der Innenwinkel kann man automatisieren, aber der Aufwand lohnt sich nicht ggü. einer individuellen Lösung. Im Fall der Fälle müssen die Kräfteplanskizze und ein paar Überlegungen genügen.

TG: UB Statik zentral, MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 51ff



Systematische Lösung – Zerlegen

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Rx} + F_{U1x} + F_{U2x} = F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1} + F_{U2} \cdot \cos \alpha_{U2}$$

$$\rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}}$$

$$\Sigma F_y = 0 = F_{Ry} + F_{U1y} + F_{U2y} = \dots \rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}} \rightarrow$$

$$F_{U1} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U2} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U2}}{\cos \alpha_{U1} \cdot \sin \alpha_{U2} - \sin \alpha_{U1} \cdot \cos \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U1} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U1}}{\cos \alpha_{U2} \cdot \sin \alpha_{U1} - \sin \alpha_{U2} \cdot \cos \alpha_{U1}}$$

$$F_{U1} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin(-45^\circ) + \sin 119,1^\circ \cdot \cos(-45^\circ)}{\cos 260^\circ \cdot \sin(-45^\circ) - \sin 260^\circ \cdot \cos(-45^\circ)} = 76,6 \text{ N}$$

$$F_{U2} = 229,1 \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin 260^\circ + \sin 119,1^\circ \cdot \cos 260^\circ}{\cos(-45^\circ) \cdot \sin 260^\circ - \sin(-45^\circ) \cdot \cos 260^\circ} = 176,5 \text{ N}$$

gerechnete Beispiele

[Böge Aufg.] Aufg. 51

Zusammensetzen

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \cos 35^\circ = 262,1 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \sin 35^\circ = 183,5 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \cos 55^\circ = 103,2 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \sin 55^\circ = 147,4 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \cos 160^\circ = -234,9 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \sin 160^\circ = 85,5 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 262,1 \text{ N} + 103,2 \text{ N} - 234,9 \text{ N} = 130,4 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 183,5 \text{ N} + 147,4 \text{ N} + 85,5 \text{ N} = 416,4 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 436,3 \text{ N}$$

$$= \sqrt{(130,4 \text{ N})^2 + (416,4 \text{ N})^2}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{416,4 \text{ N}}{130,4 \text{ N}} = 72,6^\circ$$

zur positiven x – Achse (nach rechts oben)

FTM, MVK: kein Zerlegen. TG: nur Ergebnis

Die Herleitung der Formel ist ggü. der Lösung mit Sinussatz zu aufwendig, das Auswendiglernen der Formel nicht sinnvoll → individuelle Lösung mit Sinussatz bevorzugen

1) Herleitung

8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$

und die unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2} per Gleichungssystem lösen

2) F_{U2} analog herleiten oder Symmetrie nutzen

3) Allgemeine Formel

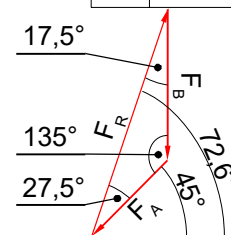
4) Man beachte die Symmetrie der Gleichungen, die mehrfach nützlich sein kann:

- Kontrollmöglichkeit
- Analogieschlüsse
- Ästhetik / Spass an Mathe vermitteln

5) Beispiel: Mobile Antenne

Zerlegen

	F	α	F_x	F_y
F_1	320N	35°	262,1N	183,5N
F_2	180N	55°	103,2N	147,4N
F_3	250N	160°	-234,9N	85,5N
F_R	436,3N	$72,6^\circ$	130,4N	416,4N
F_A	184,5N	225°	-130,4N	-130,4N
F_B	286,0N	270°	0	-286,0N



$$F_A = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_A}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 17,4^\circ}{\sin 135^\circ} = 185 \text{ N}$$

$$F_B = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_B}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 27,6^\circ}{\sin 135^\circ} = 286 \text{ N}$$



Überleitung Statik I → Statik II

Nur in FTM

Resultierende Kraft in der Ebene berechnen

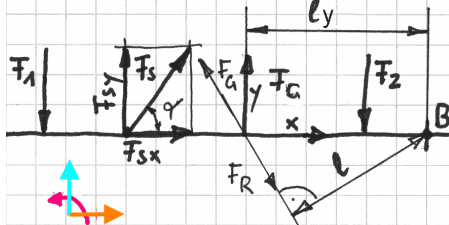
Zeichnerisches Pendant: Seileckverfahren.

Anwendung

- Ermittlung einer resultierenden Kraft mit Betrag, Richtung und Lage

Lageskizze

Balken ohne Auflager mit Gegenkraft





Freimachen

Freimachen von Körpern

= Bauteile durch Kräfte ersetzen

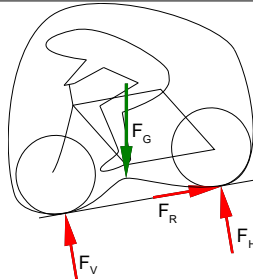
Zweck

- Erkennen aller Kräfte an einer BG
- Voraussetzung für alle Lösungen in der Statik

zB. tgme HP92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad + FahrerIn

Ges.: Aufstandskräfte



FTM, TG: Erarbeiten anhand der Übungen; MVK: entfällt

"Freimachen" ist das geistig anspruchsvollste Thema, das Technik M am TG zu bieten hat; gleichzeitig ist es die Grundlage zum Lösen von Statikaufgaben. Wer nicht richtig freimacht, braucht gar nicht anfangen zu rechnen... Im zentralen Kräftesystem sind die Aufgaben meist so einfach gestrickt, dass das Freimachen intuitiv möglich ist und seine Bedeutung nicht klar wird. Deshalb führe ich diese Einheit erst danach durch und vertiefe es in den Übungen zum allgemeinen KS. Meine Vorgehensweise: Kurz die Regeln anhand eines Beispiels erklären, dann drillmäßiges Üben

[Skolaut 2014] S.8, S.28: verwendet die Begriffe „Freischneiden“ und „Freikörperbild“, letzteres neben Kräften auch mit Maßen u.ä.

1) Im System Rad+FahrerIn findet man zahlreiche Kräfte und Gegenkräfte (Kräftepaare):

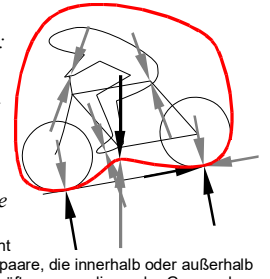
Rad drückt gegen Straße und zurück, vorne wie hinten, Reibung vs. Antriebskraft, Hände vs. Lenker, Gesäß vs. Sattel, Erde zieht an Rad+Fahrer und umgekehrt, u.v.a.m.

2) Was kann man damit anfangen?

Nix! Die An/Unzahl der Kräfte ist unhandlich und Kräftepaare, die sich per se aufheben, bieten keinen Ansatz für die Gleichgewichtsbedingungen.

3) Gesucht ist ein Verfahren, um die Kräftepaare zu reduzieren und aufzusprengen

→ Freimachen: Man entscheidet sich für eine BG und zieht einen symbolischen Kringle darum. Reduktion: Alle Kräftepaare, die innerhalb oder außerhalb des Kringles liegen, werden ignoriert. Fraktion: Von den Kräftepaaren, die an der Grenze der BG liegen bzw. von der Systemgrenze zerschnitten werden, betrachtet man nur die Kräfte, die von außen auf die BG wirken.



Vorgehensweise

1. Baugruppe wählen

- Geeignete BG grenzen an gesuchte Kräfte

2. Alle Kräfte eintragen

- An jedem Kontakt zw. der BG und dem Rest der Welt
- \perp rechtwinklig zur Berührfläche (Normalkraft) bzw. \parallel parallel zur Berührfläche (Reibung)
- Gravitation (Gewichtskräfte)

3. Bekannte Kräfte mit Richtung

- Richtungskonvention: Wie wirkt der RdW auf die BG?

4. Unbekannte Kräfte

- Einwertiges Lager: Richtung annehmen
- Zweiwertiges L.: 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x , F_y)

5. Lösbarkeit prüfen

- Lösbar sind max. als 3 unbekannte Größen (Beträge und/ oder Richtungen von Kräfte).

Wer zu viele Unbekannte hat, muss Infos suchen:

6. Lageplanskizze anfertigen

- LS dokumentiert die Überlegungen

Hinweise auf Richtungen von Kräften

Seile, Ketten usw.

übertragen nur Zugkräfte in Seilrichtung

Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)

= an 2 Stellen drehbar gelagert
übertragen Zug- oder Druckkräfte nur in der Verbindungslinie der Gelenkpunkte.
z.B. Kolben, Gitterstäbe



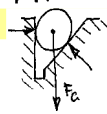
Berührflächen

übertragen Normalkräfte senkrecht und Reibkräfte parallel zur Berührfläche.



Rollkörper

Normalkräfte bei Rollkörper (Kugeln, Rollen) gehen durch ihren Mittelpunkt.



[Böge, Techn. Mechanik] einarbeiten,

Im Prinzip muss man nur die gesuchten Kräfte eintragen und hat schon einen Teil der Grenze der geeigneten Baugruppe. Auf die BG dürfen beliebig viele bekannte Kräfte wirken. Sonstige Kräfte möglich (Schule nur im Einzelfall), sie zählen aber zu den unbekannten Kräften. Gewicht- und Reibungskräfte werden berücksichtigt, wenn es verlangt wird.

Vom freizumachenden Körper werden alle Berührstellen entfernt und durch die zugehörigen Kräfte ersetzt. Am Besten denkt man sich eine Linie um die gewählte Baugruppe und sucht alle Kräfte, die diese Linie überschreiten.

Schüler setzen Kräfte oft nach Wunschen ein, z.B. "da brauche ich noch eine Kraft" oder auf Verdacht "Da bewegt sich was". Das führt zu vielen Fehlern.

Mit der Vorzeichenregel „Wie wirkt der Rest der Welt (RdW) auf die Baugruppe (BG)“ wirken Schwerkraft nach unten. Es käme auch zu richtigen Ergebnissen, trüge man ALLE Richtungen „falsch“ herum ein (Schwerkraft nach oben!), aber Mischen der Richtungssysteme funktioniert nie.

Bei zeichnerischen Lösungen muss man keine Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen, es genügen die WL. Bei rechnerischen Lösungen sind die Richtungen nötig für die Vorzeichen in den Gleichungen. Wenn man eine Richtung „falsch“ angenommen hat, wird das Ergebnis negativ und es stimmt wieder.

Es sind nur 3 unbekannte Kräfte lösbar, weil nur drei Gleichgewichtsbedingungen existieren. Die Anzahl der lösbaren Unbekannten reduzieren sich, wenn nicht alle Gleichungen angewendet werden können, z.B. beim zentralen Kräftesystem (kein Momentengleichgewicht) oder wenn alle Kräfte parallel sind (Kräftegleichgewicht nur in einer Richtung). Wenn man mehr unbekannte Kräfte findet als lösbar sind, muss man weitere Informationen suchen. Ein Lösungsversuch ohne zusätzliche Infos ist sinnlos.

Das Freimachen ist oft der schwierigste Teil einer Statikaufgabe, deshalb gebe ich für eine lesbare LS bereits 1/4 bis 1/3 der Punkte. Umgekehrt gibt es ohne LS nie die volle Punktzahl. Lösungen in der Statik sind komplex und die Fehlerquote steigt stark an, wenn man wesentliche Lösungsschritte im Kopf jongliert → LS liegt im Eigeninteresse des Schülers.

Kein TA, nur beiläufig einliefern lassen

Gemeinsame Wirkungslinie ist notwendig in der Definition, damit auch gebogenen Teile als Pendelstützen gesehen werden können. Die Form der Pendelstütze spielt keine Rolle.

Wenn die Reibung berücksichtigt werden muss, ist sie gegen die Bewegungsrichtung einzu-tragen. Die Haftreibung $F_R = \mu \cdot F_N$ ist nicht die tatsächliche Reibkraft, sondern ihr höchst-möglicher Wert. Deshalb ist die Reibkraft in aller Regel unbekannt. Meist wird die Reibung vernachlässigt.

Für die Rollreibung im Ruhezustand gilt dasselbe wie für die Haftreibung oben.

Verschiebesatz: Wenn über eine Rolle ein Seil gelegt ist, das in beide Richtungen gleich stark zieht, spielt ihr Durchmesser „keine Rolle“.

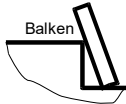
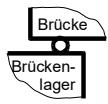


Lose und feste Lager

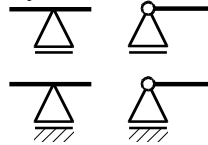
sind in allen Richtungen (F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z) außer einer, zwei, drei beweglich:

Einwertige Lager (Loslager)

sind in allen Richtungen außer einer beweglich.
konstruktive Beispiele

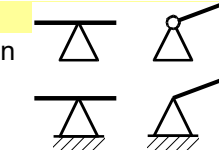


Symbole:



Zweiwertige Lager (Festlager)

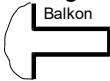
sind in allen Richtungen außer zweien beweglich.



FO Brückenlager

Dreiwertige Lager

sind in allen Richtungen fest.



Vertiefung

FTM, TG: AB Statik_Ub_Abi ([Böge Aufg.] Aufgabe 9.28 sind zu leicht)



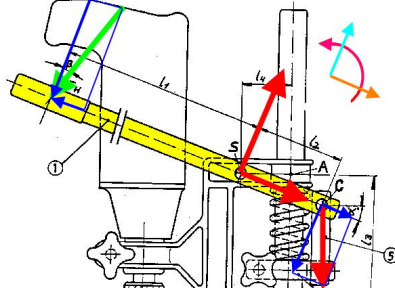
Statik II: Allgemeines Kräftesystem

Auflagerkräfte in der Ebene berechnen

Das grafische Schlusslinienverfahren löst Aufgaben mit komplizierter Bemaßung leichter (→ HP 98/99-2 Zugmaschine mit Anhänger), steht aber nicht mehr im Lehrplan. rechnerische Verfahren sind flexibler, z.B. "Ab welchem .. kippt.."
[Skolaut 2014] S.26: „Statisches Gleichgewicht am ebenen starren Körper“ → die Einschränkungen statisch, eben und starr erfolgten schon bei der Einführung.

TG: HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer

Lageskizze Hebel



Im Beispiel kann der Drehpunkt in den Bolzen S oder C liegen. Hier wird S gewählt, da von dort die Bemaßung ausgeht und dies die Rechnung ein wenig erleichtert.

$$\sum M_S = 0$$

$$= 0 = F_{Hy} \cdot l_1 - F_{Cy} \cdot l_2 \rightarrow$$

$$F_C = F_{Hy} \cdot \frac{l_1}{l_2 \cdot \cos \alpha} = 98,48 \text{ N} \cdot \frac{300 \text{ mm}}{90 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ}$$

$$F_C = 349,3 \text{ N}$$

4) Hebelarme und Drehrichtung vertiefen

Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

Im Beispiel bekommt man den Hebelarm zu F_H zwar noch relativ leicht, aber ich will das übertragbare Verfahren zeigen.

$$F_{Hx} = F_H \cdot \sin \beta = 100 \text{ N} \cdot \sin 10^\circ = 17,36 \text{ N}$$

$$F_{Hy} = F_H \cdot \cos \beta = 100 \text{ N} \cdot \cos 10^\circ = 98,48 \text{ N}$$

5) Sorgfältig auf die Vorzeichen eingehen. Jede der 3 GG-Bedingungen gehört zu einer der 3 Koordinatenrichtungen.

$$\sum F_x = 0$$

$$= 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \rightarrow$$

$$F_{Sx} = F_{Hx} - F_{Cx} \cdot \sin \alpha$$

$$F_{Sx} = 98,48 \text{ N} - 349,3 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = -102,1 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$= 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \rightarrow$$

$$F_{Sy} = F_{Hy} + F_{Cy} \cdot \cos \alpha$$

$$= 17,36 + 349,3 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ$$

$$F_{Sy} = 426,7 \text{ N}$$

Wenn es ein Festlager gibt:

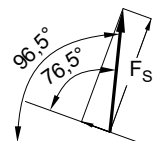
$$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102,1 \text{ N})^2 + (426,7 \text{ N})^2}$$

$$F_S = 438,7 \text{ N}$$

$$\gamma_S = \arctan \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}}$$

$$= \arctan \frac{426,7 \text{ N}}{-102,1 \text{ N}}$$

$$= -76,5^\circ$$



Vertiefung

TGT: ja; TGMT: ja; FTM: ja

Statikaufgaben der Ebene löst man, indem man die 3 Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$ und $\sum M = 0$ für beliebige Koordinatensysteme aufstellt und mit dem entstehenden Gleichungssystem max. 3 unbekannte Größen löst. Schon das Aufstellen der Gleichungen wird durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems erleichtert.

Wenn man das Gleichungssystem händisch lösen will/muss, sollte man weitere Möglichkeiten zur Vereinfachung nutzen, z.B. einen geschickten Drehpunkt für das Momentengleichgewicht.

Arbeitsplan

1. Freimachen + Lageskizze erstellen

- Baugruppe wählen (s.o.) und benennen
- alle Kräfte eintragen (s.o.)

2. Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.)

- für das Vorzeichen in Rechnungen
- „falsche“ Annahme → negatives Ergebnis → stimmt wieder
- für zweiwertige Lager 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x , F_y)

3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen

$$\sum M = 0 \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

mögliche Vereinfachungen

4. Momentengleichgewicht $\sum M =$

- Drehpunkt im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte
- eine Gleichung mit 1 Unbekannten = sofort lösbar.

- Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft \perp Hebelarm)

Der Hebelarm ist der kürzeste Abstand zw. Drehpunkt und Wirklinie

5 Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen

- Nicht Hebelarme berechnen,
- sondern Kräfte rechtwinklig zur Bemaßung zerlegen

- Hilfe: Koordinatensystem in Richtung der Bemaßung legen

- Man kann für jede Kraft ein eigenes Koordinatensystem wählen, z.B. Aufg.4: Hebebühne

- im tatsächlichen Angriffspunkt →

6. Kräftegleichgewichte $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$

- beliebige Reihenfolge

$\sum F_x = 0$: In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme. Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$\sum F_y = 0$: Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (blau) wirkt.

7. ggf. zusätzliche Gleichungen

- Für jede Unbekannte eine Glchg.

- im Abi selten, z.B. HP1983/84-2 Hebestation

8. Gleichungssystem lösen

- per Hand oder CAS

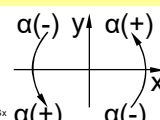
9. Betrag und Richtung ermitteln

Achtung: arctan ergibt kein eindeutiges Ergebnis für α (Zählrichtung von α siehe rechts), deshalb muss man den Winkel mit einer Skizze deutlich machen.

Dazu skizziert man die Komponenten F_{Sx} ($\approx -100\text{N}$) und F_{Sy} ($\approx +400\text{N}$) in das gewählte Koordinatensystem und überlegt dann, wo der berechnete Winkel liegt.

10. Plausibilität prüfen

Kompliziertere Aufgaben:
tgme HP1983/84-2 Hebestation
tgme NP201112-5 Salzklappe



- Für alle Probleme der Statik ist Freimachen unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine unmaßstäbliche Skizze.
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Ich lege Wert darauf, dass die gewählte Baugruppe benannt wird, a) damit ich weiß, welche BG eine Schülerin meint, und b) damit sie es auch weiß ;)
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Man muss die Richtungen nicht kennen, sondern nur annehmen und kennzeichnen. Wenn die Richtung "falsch" angenommen wurde, wird das Ergebnis der Rechnung negativ und stimmt wieder. Es ist auch nicht sinnvoll, die "falsche" Richtungen nachträglich zu korrigieren, weil man dabei die ganze Rechnung korrigieren müsste. Wer sicher gehen will, vermerkt am negativen Ergebnis: „Kraft wirkt entgegen der Annahme.“
- In zweiwertigen Lagern (=Festlager) trägt man für unbekannte Kräfte die Komponenten in x- und y-Richtung ein.

Tipp 1: Wahl des Drehpunktes

Idee: Wenn man den Drehpunkt für die Gleichung $\sum M = 0$ im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte wählt, haben diese Kräfte den Hebelarm 0 und fallen aus der Gleichung. Es bleibt also nur 1 Unbekannte → manuell leicht zu lösen.¹

Mit CAS ist dieser Schritt verzichtbar.

Sonstiges: Einen solchen Schnittpunkt gibt es immer, da Aufgaben mit 3 parallelen unbekannten Kräften nicht lösbar sind. Bisher waren in den Abi-Aufgaben diese Schnittpunkte immer bemaßt. Wenn dies nicht Fall sein sollte (z.B. [Böge Aufg.] Aufg. 120; 129.), muss man die Maße zum Schnittpunkt ermitteln oder das Gleichungssystem individuell lösen.

Nicht von Kraft mal Länge o.s.ä. reden, da dies leicht mit der Arbeit verwechselt wird, aber dort sind Kraft und Weg parallel.

Tipp 2: Komponenten statt Hebelarm

Idee: Zur Berechnung der Momente müssen Kraft und Hebelarm rechtwinklig zueinander stehen. Wenn dies durch die Bemaßung nicht gegeben ist, können die Hebelarme zwar berechnet werden, aber das funktioniert in jeder Aufgabe anders, ist deshalb fehleranfällig und nur in einfachen Fällen sinnvoll. Meist ist es einfacher, die Kräfte in Bemaßungsrichtung zu zerlegen und die Komponenten mit den gegebenen Längen zu multiplizieren – das Verfahren funktioniert immer gleich und kann eingeübt werden. Zwanglos funktioniert es, wenn man das Koordinatensystem in Bemaßungsrichtung legt.

Tipp 3: Kraftkomponenten skizzieren

Es sind oft Kleinigkeiten: Kräfte im Angriffspunkt zerlegen, damit man die Hebelarme, nicht verwechselt



Man könnte noch einmal $\sum M = 0$ mit einem anderem Drehpunkt ansetzen, aber $\sum F = 0$ ist weniger aufwändig.

Vorzeichenregel: Es bekommen die Kräfte ein negatives Vorzeichen, deren angenommen Richtung entgegen den Koordinatenrichtungen x bzw. y wirken. Achtung: Diese Vorzeichen sind nicht die Vorzeichen des Momentengleichgewichts.

Plausibilität: Ist es plausibel, dass in F_C und F_S ca. 4x größer als F_H sind?

[Böge Aufg.] Aufg. 120; 119c
Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Rittersche Schnittverfahren verwendet werden.

¹ [Müller-Breslau I] S.211: „Denn wählt man den Schnittpunkt von irgend zweien der drei Spannkraften zum Drehpunkte und setzt die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null, so erhält man eine Gleichung, in der nur eine unbekannte Spannkraft vorkommt, weil die statischen Momente der durch den Drehpunkt gehenden Spannkraften gleich Null sind.“



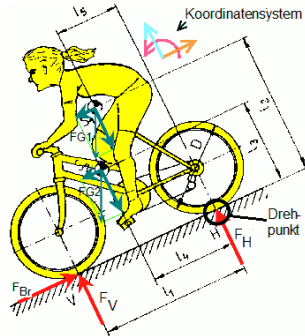


Übungen

Beispiel: schiefe Ebene

z.B. HP 92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad+Fahrerin



$$\begin{aligned} F_{G1x} &= F_{G1} \cdot \sin \alpha = 560 \text{ N} \cdot \sin 15,6^\circ = 151,0 \text{ N} \\ F_{G1y} &= F_{G1} \cdot \cos \alpha = 560 \text{ N} \cdot \cos 15,6^\circ = 539,3 \text{ N} \\ F_{G2x} &= F_{G2} \cdot \sin \alpha = 140 \text{ N} \cdot \sin 15,6^\circ = 37,7 \text{ N} \\ F_{G2y} &= F_{G2} \cdot \cos \alpha = 140 \text{ N} \cdot \cos 15,6^\circ = 134,8 \text{ N} \\ \text{mit } \alpha &= \arctan 28\% = 15,6^\circ \end{aligned}$$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft \perp Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\begin{aligned} \sum M_H &= 0 \\ &= \pm F_{Br} \cdot 0 - F_V \cdot l_1 \pm F_H \cdot 0 \\ &\quad + F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4 \rightarrow \\ F_V &= \frac{F_{G1x} \cdot l_2 + F_{G1y} \cdot l_5 + F_{G2x} \cdot l_3 + F_{G2y} \cdot l_4}{l_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_V &= \frac{151,0 \cdot 1000 + 539,3 \cdot 426 + 37,7 \cdot 640 + 134,8 \cdot 575}{1044} \frac{\text{N} \cdot \text{mm}}{\text{mm}} \\ F_V &= 462 \text{ N} \end{aligned}$$

In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme.
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ &= + F_{Br} - F_{G1x} - F_{G2x} \rightarrow \\ F_{Br} &= F_{G1x} + F_{G2x} \\ &= 151,0 \text{ N} + 37,7 \text{ N} = 189 \text{ N} \end{aligned}$$

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ &= F_V - F_{G1y} - F_{G2y} + F_H \rightarrow \\ F_H &= -F_V + F_{G1y} + F_{G2y} \\ &= -462,0 \text{ N} + 539,3 \text{ N} + 134,8 \text{ N} \\ &= 212 \text{ N} \end{aligned}$$

Beispiel: mit Zusammensetzen

Beispiel: HP 83/84-2 Hebestation

Beispiel Kippaufgabe

FTM

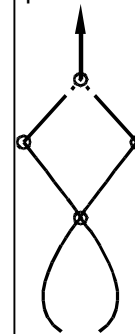
72-82: Resultierende mit Abstand weglassen

83-97: Lagerkräfte (einstufig)

98ff Lagerkräfte (mehrstufig)

Warum Algorithmen? Die Stärke des Menschen ist es eigentlich, sich auf **neue** Probleme einzustellen, während wiederkehrende Spezialaufgaben wie Fliegen fangen besser von Fröschen beherrscht werden [Ganten 2003]. Das sollte auch Schule fördern, also Vielseitigkeit verlangen statt stumpfsinniger Tätigkeiten. Dem gegenüber steht, dass Ingenieure meist Standardprobleme mit Standardmethoden bearbeiten. Und Schüler können in einer 4,5-stündigen Abi-Prüfung nicht dauernd hochkonzentriert arbeiten und brauchen Lösungsmethoden, die eine reduzierte Hirnleistung vertragen: Also doch Algorithmen.

Spreizzange zum Heben von Steinquadern



Statik_TA_allgemein-rechnerisch-Auflager.odt

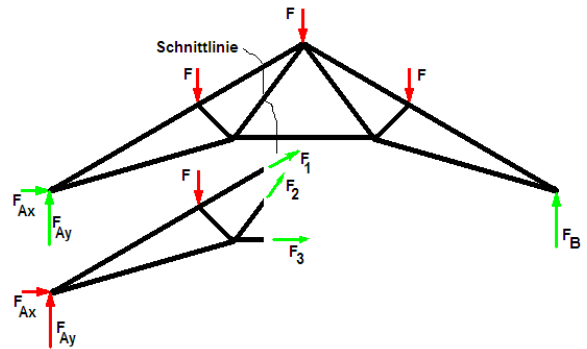
Seitenumbruch



Fachwerke

Rittersches Schnittverfahren

Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 160ff) können berechnet werden, indem man die Auflagerkräfte berechnet und sich dann innerhalb des Fachwerkes von Knoten zu Knoten hangelt. Bei großen Fachwerken oder wenn man nur die Kräfte einzelner Stäbe benötigt, ist der Ritterschnitt einfacher. Dazu schneidet man das Fachwerk geeignet auf und wendet die Gleichgewichtsbedingungen auf die geschnittenen Einzelteile an.



Bildquelle: [Wikipedia]/Rittersches_Schnittverfahren - File:Ritterscher_Schnitt.png

Statik_TA_Fachwerk.odt

Notizen

nicht unterrichten, zusätzliche Info

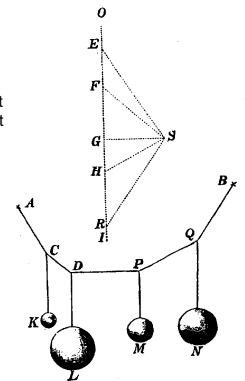
Carl Culmann (1821-1861)

Quellen: [Kurrer 2002]

Pierre de Varignon (1654–1722).

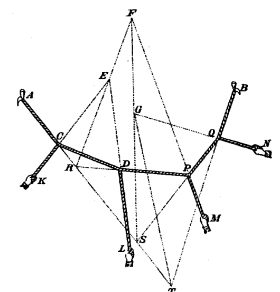
P.Varignon führte in seinem 1725 posthum veröffentlichten Werk *Nouvelle Mécanique ou Statique* das Seil- und Kräftepolygon ein. Ein undehnbares, masseloses Seil bestimmter Länge wird an den Punkten A und B aufgehängt und durch die Gewichte K, L, M und N belastet (Bild 6-10). Die sich einstellende Gleichgewichtslage ACDPQB des Seiles wird als Seilpolygon bezeichnet; es wird durch das Kräftepolygon SEFGHRI festgelegt. Das Kräftepolygon ist eine Aneinanderreihung von Kräfte Dreiecken, mit denen nacheinander das Gleichgewicht in den Seilknoten C, D, P und Q erfüllt wird; beispielsweise erfüllt das Kräfte Dreieck SEF das Gleichgewicht im Seilknoten C. Varignon gibt auch die Konstruktion eines Seilpolygons mit beliebig gerichteten Kräften an. Bis auf Poncelet, der in seinen Vorträgen an der Artillerie- und Genieschule in Metz das Seilpolygon für Schwerpunktbestimmungen verwandte, blieb die Anwendung des Seilpolygons auf die Ermittlung von Gleichgewichtslagen von Zug- und Druckgliedern - etwa bei Hängebrücken und Wölbkonstruktionen - beschränkt.

aus [Kurrer 2002] S.223, [Varignon 1725] Band 1, S.190



Wie kommt man auf den Punkt S?

Zusammenhang mit Schlusslinien- bzw. Seileckverfahren ? Nachvollziehen !



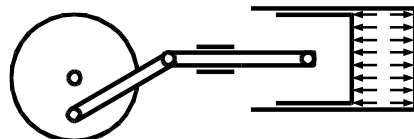
Seil- und Kräftepolygon nach Varignon (1725)

Konrad Zuse (1910-1995)

„Zuse verallgemeinert dieses noch an der Stabstatik orientierte Rechenschema zum Verfahren des Rechenplanes oder Programms. Sein Rechenplan bildete den Aufpunkt für die erste lauffähige programmgesteuerte Rechenmaschine der Welt, der 1941 realisierten Zuse Z3.... In der Computerstatik bleibt das Rechnen außen vor: Der Bauingenieur kann Symbolketten transformieren und manipulieren, ohne auf die Bedeutung der Symbole angewiesen zu sein. ... Man könnte sogar sagen, daß durch die graphische Statik Culmanns die Entwurfsarbeit des Bauingenieurs nicht nur rationalisiert sondern gleichzeitig ästhetisiert wurde, treten doch die Kräfte- und Konstruktionspläne in der doppelten Gestalt sowohl des sinnlichen Bewußtseins als auch des sinnlichen Bedürfnisses auf. Jene Entwicklung erreichte in den 1880er und 1890er Jahren ihren Höhepunkt; prominentes Beispiel hierfür ist der mit Methoden der graphischen Statik durch den Culmann-Schüler Koechlin analysierte Eiffelturm.“ [Kurrer 2002] S452f

Fragen

Verhältnisse bei stehendem Zylinder



[Müller-Breslau III] S.19 berechnet das maximale Moment $m_{\max} M (!)$ mit der Polweite H (in Tonnen!), die grafische Darstellung ähnelt der des Schlusslinien- bzw. Seileckverfahrens mit Pol - Nachvollziehen

Statik_TA_Sonstiges.odt

Register 4

Seitenumbruch



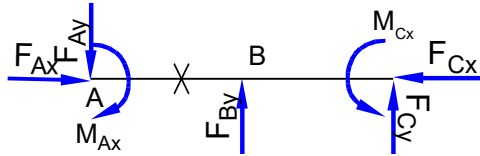
Festigkeitslehre

Festigkeitsberechnungen

Auch per Referate möglich, aber zeitintensiv

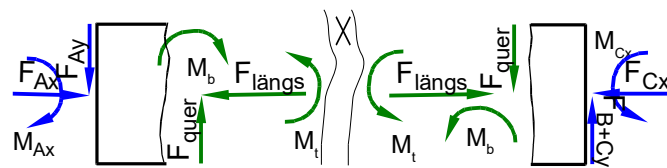
Kräfte ermitteln

Äußere Kräfte: Freimachen (→ Statik)

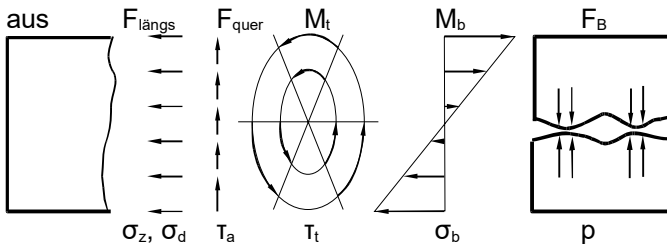


Innere Kräfte: Freischneiden

- An der Stelle x, die betrachtet werden soll
- Alle **externen** Kräfte auf einer Seite eintragen
- Interne** Kräfte an der Schnittstelle ergänzen, bis das linke Teilstück im Gleichgewicht ist.
- Schnittstelle X ins Gleichgewicht bringen, ebenso rechtes Teilstück.



Beanspruchungsarten



Von links nach rechts: Zug-, Druck-, Scher-, Torsions-, Biegespannungen, Flächenpressung

Belastungsfälle, Lastfälle

Lastfall I: Ruhende Belastung

→ [EuroTabM46] S.41

Lastfall II: Schwellende Belastung

→ [EuroTabM46] S.46

Lastfall III: Wechselnde Belastung

(Knickung)

Überlagerte Spannungen

Überlagern sich Normal- und Schubspannungen, wird eine Vergleichsspannung σ_v errechnet. Hypothesen:

- Normalspannungsh. NH, nach Rankine, 1861
- Gestaltänderungsh. SH, nach Tresca, 1868
- Gestaltänderungsh. GEH, nach v.Mises, 1913

Vertiefung

ODP für die einzelnen Aufgaben, z.B. [Böge Aufg.] Aufg. 741, Scherhülse

Einarbeiten: [Decker 2009]; [Steinhilper 2007 I]; [Mattheck 2003]; [Hering 1992]; [Roloff/Mattek 1995]; [Bargel/Schulze 2005]

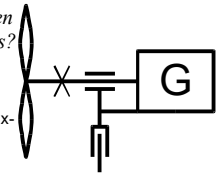
FO Referatsthemen zur Festigkeitslehre

Werkstoffkunde und Statik fließen hier zur Festigkeitslehre zusammen.

1) Welche Belastungen (Kräfte und Momente) wirken an der Stelle x auf die Welle eines Windgenerators?

G unterscheidet den Generator vom Propeller mit Motor M.

- F_{Ax} : Windkraft auf Propeller
- F_{Ay} : Eigengewicht Propeller
- M_{Ax} : Drehmoment durch Wind auf Propeller (Torsion um die x-Achse)
- F_{By} : Stützkraft des Lagers
- F_{Cx} : Axiallager im Generator um Fay aufzufangen
- F_{Cy} : Radiallager im Generator
- M_{Cx} : Drehwiderstand im Generator durch Lorentzkraft



2) Welche Kräfte und Momente werden an der Stelle x übertragen?

Externe Kräfte (vereinfacht in der Ebene) ohne Betrag mit Richtung eintragen lassen.

3) Kräfte an der Schnittstelle eintragen lassen.

An der Schnittstelle der Welle wirken:

- $F_{längs}$: Druckkräfte heben F_{Ax} auf
 - M_t : Torsionsmoment hebt M_{Ax} auf
 - F_{quer} : Scherkräfte heben F_{Ay} auf
 - M_b : Biegemoment entsteht durch F_{Ay} und den Hebelarm
- Zum Verständnis: Innere und äußere Kräfte des linken Teilstückes heben sich auf, genau wie die inneren Kräfte links und rechts der Schnittstelle (des Schnittufers) und die Kräfte am rechten Teilstück.

[Decker 2009]: Äußere Kräfte (Belastung) bewirken innere Kräfte (Schnittlasten).

Begriff Beanspruchungsarten siehe [Decker 2009] S.25

4) Wie verteilen sich die Kräfte im Werkstück? → Spannungen

$F_{längs}$ (Normalkraft zur Schnittfläche) bewirkt Druck-/Zugspannungen (Normalspannungen).
 p (Flächenpressung) Druckbeanspruchung an Berührungsflächen.

F_{quer} (Querkraft zur Schnittfläche) bewirkt Scherspannungen (Schubspannungen).

M_t (Torsionsmoment) erzeugt Torsionsspannungen (Schubspannungen). Sie verlaufen etwa 45° zur Schnittfläche, zum Beweis **Torsionsbruch einer Kreide** zeigen.

M_b (Biegemoment) erzeugt Dehnung, die linear abhängig vom Abstand zur Drehachse ist (Strahlensatz). Dehnung erzeugt Druck-/Zug- (Normalspannungen), die ebenfalls linear zusammenhängen (Hookesches Gesetz), sodass der Spannungsverlauf im elastischen Bereich theoretisch linear ist. Im plastischen Bereich (Umformen) gilt dies nicht mehr.

Die Beanspruchungen bewirken eine Längenänderung (Hooke'sches Gesetz, für viele Stoffe annähernd linear) und Querschnittsänderungen.

5) anhand → [EuroTabM] „Belastungsfälle“

Ruhende Belastung halten Teile am besten aus. Vgl. Pyramiden: Ruhend belastet halten sie seit Jahrtausenden, wenn man genauso lange mit einem kleinen Hämmerchen daran geklopft hätte, wären sie längst Sand.

tgtn_NP201011 Aufgabe 1.1.4: „wird schnellend beansprucht“.

tgt: Bisher nur Lastfall 1

tgtn: Alle Belastungsfälle möglich

Knickung ist bei langen schlanken Körpern eine wesentlichere größere Belastung als Druck, steht aber nicht im Lehrplan (TG, FTM). Bei Flächen tritt Beulung auf.

Details: [Decker 2009] S.28f

Beispiel für überlagerten Normalspannungen: Eine Spannbetonbrücke wird unten durch Stahleinlagen auf Druck gespannt. Biegt sich die Brücke unter Last, wird der Beton (geringe Zugfestigkeit) nicht auf Zug belastet, sondern vom Druck entlastet, während die Stahleinlagen noch mehr Zug aushalten müssen. Ähnlich: Verspannungsschraubt Schrauben, übereinander geschrumpfte Geschützrohre.

Kein Abithema

[Böge Aufg.] Aufgabe 651-656 (nicht erforderlich)



Allzweckformel für Festigkeitslehre

am Beispiel der Zugfestigkeit

$$\frac{\sigma_{\text{grenz}}}{\nu} = \sigma_{\text{zul}} > \sigma = \frac{F}{S} \quad \left[\frac{N}{\text{mm}^2} = \text{MPa} \right]$$

F äußere Kraft [N]

oder andere Belastung: Moment M_b oder M_t [Nm]

S Querschnittsfläche [mm²]

(gemeint ist immer die Fläche, die kaputt geht)

oder andere Flächenkennwerte

Widerstandsmomente W oder W_p

σ tatsächliche Spannung [N/mm²] im Werkstoff, mithilfe Rechnung geschätzt

oder Schubspannung τ

σ_{grenz} Grenzspannung [N/mm² = MPa] im Werkstoff

Werkstoffkennwert, z.B. R_m , R_e , $R_{p0,2}$, σ_{bF} , τ_{tF}

ν Sicherheitszahl []

ist eine typische Ingenieurslösung !

vom Konstrukteur festgelegt nach:

- Umfang der Unwägbarkeiten (Belastung, -sfall, überlagerte Spannungen..)
- Risiko, Wert
- gesetzliche Vorschriften
- Erfahrung
- Veränderung während der Lebensdauer (Korrosion, Alterung, Verschleiß, Ermüdung..)

σ_{zul} zulässige Spannung [N/mm²] im Werkstoff

vom Konstrukteur festgelegt

Diese Formel ist für alle Belastungsarten einsetzbar, nur die Formelzeichen wechseln

AB entwerfen

Zur Übersicht die betrachteten Spannungen, ihre übliche Abkürzungen und Grenzwerte. Normalspannungen σ , Schubspannungen τ . Tatsächliche Spannungen erhalten Kleinbuchstaben als Indices, Grenzspannungen Großbuchstaben. Die Indices z und d dienen zur Unterscheidung von Zug- und Druckspannungen. Flächenpressung ist zwar keine typische Spannung und erhält deshalb einen anderen Buchstaben. Da sie aber wie Spannungen gerechnet wird, wird sie hier aufgenommen. τ_t und σ_b meinen die maximale Spannung an der Außenfläche des Profils. Flächenpressung ist die Beanspruchung der Berührungsfächen zweier gegeneinander gedrückter fester Bauteile und heißt bei Nieten auch Lochleibungsdruck. Es ist eigentlich keine innere Spannung und hat deshalb eine andere Abkürzung, wird aber ähnlich berechnet.

1) Ein: Bungeespringen. Welche Größen sind bei der Auswahl des Seiles zu berücksichtigen ? Von rechts nach links durchgehen.

Belastung (Kraft) wird mithilfe der Statik (bzw. Dynamik) näherungsweise ermittelt und ist in schulischen Aufgaben vorgegeben.

Querschnitt S und Werkstoff sind die Freiheiten des Konstrukteurs.

Aus Kraft und Querschnitt ergibt sich die vorhandene Spannung, die immer nur geschätzt ist, denn die folgen Werte sind nicht exakt:

- Die Belastung F oder M F beruht im Wesentlichen auf Annahmen
- Der Querschnitt stimmt bestenfalls zu Beginn des Lebenszyklus
- Die Formel selbst ist nur eine Annäherung. [Roloff/Matek 1995], S.35: "Aus der Vielzahl der Festigkeitshypothesen haben sich für die Festigkeitsberechnung bewährt"

Hinweis zum Unterschied zw. Mathematik und Technik: In der Mathematik sind einmal gefundene Zusammenhänge „wahr“ im Sinne von überall und ewig gültig. In der Technik beruhen Formeln noch mehr als in den Naturwissenschaften auf Hypothesen, die nur solange gültig sind, bis bessere gefunden wurden.

Die Werkstofffestigkeit wird mit σ_m eingebracht.

Für Grenzspannung ist der Belastungsfall zu beachten (im Abi nur Belastungsfall 1, statische Belastung). Die angegebenen Werte gelten nur für einachsige Spannungszustände, mehrachsige (überlagerte) Spannungen siehe oben.

→ [EuroTabM] „Festigkeitswerte“, „Werkstoffe“

$$\text{MPa} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^6 \frac{\text{N}}{(1000 \text{ mm})^2} = 1 \text{ Mio} \frac{\text{N}}{1 \text{ Mio mm}^2} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Sicherheitszahl ν ist eine typische Ingenieurslösung: Probleme werden durch Erfahrungswerte gelöst, auch wenn sie noch nicht vollständig verstanden sind. Alle Unwägbarkeiten werden mit der Sicherheitszahl abgedeckt. Sie ist aber kein Freibrief, um eine Konstruktion zu überlasten.

→ [EuroTabM] „Sicherheitszahlen“

[Roloff/Matek 1995], S.52: „Die Höhe der erforderlichen Sicherheit kann für den Anwendungsbereich Maschinenbau allgemein nicht angegeben werden. Es liegt im Ermessensbereich des Konstrukteurs, für jeden Einzelfall nach den zu erwartenden Betriebsbedingungen (Häufigkeit der Höchstlast, Art des Lastkollektivs, Spannungsverhältnis κ u.a.) die Sicherheit eigenverantwortlich festzulegen ...“

- kleinere Sicherheit, wenn die äußeren Kräfte sicher erfasst werden können und ein etwaiger Bruch des betreffenden Bauteils keinen großen Schaden anrichtet und dieser schnell behoben werden kann;
- höhere Sicherheit, wenn äußere Kräfte nicht genau zu erfassen sind und bei einem etwaigen Bruch des betreffenden Bauteils großer Schaden (Lebensgefahr, Betriebsstörungen) entstehen kann.“

FO [Roloff/Matek 1995] S.52: „Eine genaue rechnerische Vorhersage der vorhandenen Bauteilsicherheit kann aufgrund der nur schwer erfassbaren Einflussgrößen, der z.T. recht erheblichen Streuung der Festigkeitswerte und der Vereinfachung im Rechnungsansatz nicht gemacht werden.“

Die Sicherheitszahl kann reduziert werden, z.B. aus Gewichtsgründen im Flugzeugbau: komplexere Rechenmodelle (FEM), mehr Versuche, erhöhter Q-Aufwand, häufigere Wartung, polierte Oberflächen.

Mit dieser Formel können Zug- und Druckspannungen, Flächenpressung und Scherung berechnet werden. Die Frage bleibt nur, welche Spannung, Kraft und Fläche man einsetzen muss.

Formel: und Kennwerte → [EuroTabM] „Festigkeitswerte“

Grenzwerte oder Festigkeitskennwerte:

Festigkeit ist die innere Widerstandskraft eines Werkstoffes. Festigkeit ist der Widerstand gegen Verformung oder Bruch.

Grenzspannungen erhalten Großbuchstaben als Indices. Sie gelten nur unter Prüfbedingungen, im wirklichen Leben müssen sie meist reduziert werden (zulässige Grenzspannungen). Überschreiten von (Fließ-)Grenzen führt zu plastischer Verformung. Überschreiten von Festigkeiten führt zum Bruch.

Überarbeiten

Übersicht über die Formelgrößen

Spannung	Abk.	Grenzwerte (statisch)	Ursächliche Kraft	Profilkennwert
Zugspannung	σ , σ_z	Streckgrenze R_e bzw. Dehngrenze $R_{p0,2}$ Zugfestigkeit R_m	Zugkraft F_z	Querschnittsfläche S_0
Druckspannung	σ , σ_d	Druckfließgrenze σ_{dF} Druckbruchgrenze σ_{dB}	Druckkraft F_d	Querschnittsfläche S_0
(Ab-)Scherspannung	τ_a	Scherfließgrenze τ_{aF} Scherfestigkeit τ_{aB}	Querkraft F_a	Querschnittsfläche S_0
Torsionsspannung	τ_t	Torsionsfließgrenze τ_{tF} Torsionsbruchgrenze τ_{tB}	Torsionsmoment M_t	polares Widerstandsmoment W_p
Biegespannung	σ_b	Biegefließgrenze σ_{bF}	Biegemoment M_b	axiales Widerstandsmoment W
Flächenpressung	p	zulässige Flächenpressung p_{zul}	Normalkraft F_N	projizierte Fläche A_{proj}
Knickung				

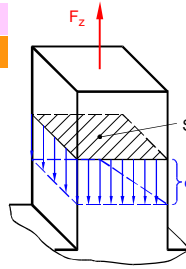


Zugfestigkeit

Allzweckformel für Zugfestigkeit

$$\frac{\sigma_{\text{zugrenz}}}{\sqrt{V}} = \sigma_{\text{zul}} > \sigma_z = \frac{F_z}{S}$$

Normalspannung ist gleichmäßig auf dem Querschnitt verteilt.



Festigkeitswerte σ_{zugrenz}

Belastungsfall 1

= statische Belastung

– R_e bzw. $R_{p0,2}$: gg. plast. Verformung

– R_m : gegen Bruch:

→ [EuroTabM46] S.431ff „Baustähle, Stähle, ..“

Belastungsfall 2

= schwelende Belastung

– σ_{zSch} : gegen plast. Verformung

→ [EuroTabM46] S.46

Belastungsfall 3

= wechselnde Belastung

– σ_{zW} : gegen plast. Verformung

→ [EuroTabM46] S.46

Vertiefung

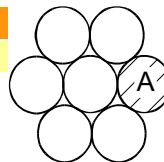
MVK: [EuroRBM]; TG: Festigkeit_Ub_Abi

Sonderfälle

Stahlseil mit Einzeldrähten

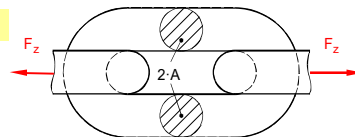
$$\sigma_z = \frac{F_z}{S} = \frac{F_z}{n \cdot A}$$

n: Anzahl der Einzeldrähte



(Rundglieder-)Kette

$$\sigma_z = \frac{F_z}{S} = \frac{F_z}{2 \cdot A}$$



Schrauben (Gewinde)

Festigkeitsklasse

→ TabB „Festigkeitsklassen ...“

ist im Schraubenkopf eingepreßt. Beispiel: 6.8

$$6: \rightarrow R_m = 6 \cdot 100 \frac{N}{mm^2} = 600 \frac{N}{mm^2} = 600 MPa$$

$$.8: \rightarrow R_e = 0,8 \cdot R_m = 0,8 \cdot 600 \frac{N}{mm^2} = 480 \frac{N}{mm^2} = 480 MPa$$

FTM, MVK, TG:

1) Variante 1: Beanspruchungen als HA in Einzel- oder Partnerarbeit erarbeiten und anschließend im Unterricht vortragen lassen.

Dazu sollen die Vortragenden die Vorgehensweise anhand des TabB erklären und als Beispiel 2 passende Aufgaben aus Hauptprüfungen vorrechnen. Zugspannungen soll von 2 Schülern vorgetragen werden, da hier σ_z , σ_{zul} , σ_{lim} erklärt werden muss.

Wdhg: Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, R_m , R_e , $R_{p0,2}$, Kennwerte, Formeln

2) Variante 2: Wiederholung Zugversuch.

→ [EuroTabM] „Zugversuch“

FTM, MVK, TGME: nur Belastungsfall 1

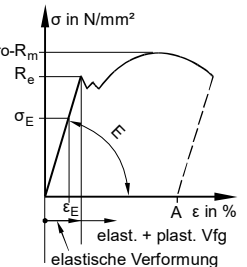
TGTM: Belastungsfälle 1 – 3

Belastungsfall 4 (?) (= allgemein schwingend) → war in [Euro-R_m TabM] Aufl. 38-41 aufgeführt.

Für Grenzspannung ist der Belastungsfall zu beachten:

→ [EuroTabM] „Festigkeitslehre“, „Druckspannung“

→ [EuroTabM] „Festigkeitswerte“, „Stähle...“, „Werkstoffe“, „Sicherheitszahlen“...



FTM: [Böge Aufg.] 661ff „Beanspruchung auf Zug“

661-662: Warmlauf; 663-664: Gewinde; 665 Drahtseil; 666 Drahtseil mit Eigengewicht entweder analytisch oder iterativ ausrechnen; 668, 673 Rundgliederkette, 670, 674, 677, 679

Im Laufe der Übungen folgende Besonderheiten zeigen:

Möglichst gar nicht erst den Gesamtquerschnitt S ausrechnen. Es gibt nämlich Schüler, die aus dem Gesamtquerschnitt einen Gesamtdurchmesser ausrechnen und den dann durch die Anzahl der Drähte teilen.

iterative Rechnung

[Böge Aufg.] 666 Drahtseil mit Eigengewicht entweder analytisch oder iterativ ausrechnen: 1. Gewicht schätzen; 2. Querschnitt und das daraus folgende Gewicht berechnen; 3. Schätzung und Rechnung sind idealerweise gleich, wenn nicht: 1. Neue Schätzung anhand der Rechnung; 2. ...

Video „Drahtseil spleißen“

Heißen auch Gliederkette bzw. Rundstahlkette

Die Erfahrung zeigt, dass Rundgliederketten halten, wenn man die beiden parallelen Querschnitte A dimensioniert.

Das gleiche gilt für Hülsen-, Rollen-, und ähnliche Ketten.

Video Herstellung „Kette Rundstahl“

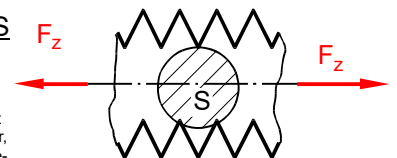
Spannungsquerschnitt S

→ TabB „Gewinde“

Der Querschnitt des KernØ des Gewindes ist eine brauchbare Schätzung des Spannungsquerschnitt S. Tatsächlich ist der Spannungsquerschnitt etwas größer, da sich die Täler des Gewindes nicht gegenüberliegen. Da man sowohl für die Schätzung als auch für den korrekten Wert das Tabellenbuch aufschlagen muss, kann man gleich den korrekten Spannungsquerschnitt S nehmen.

[Schneider21] S.4.90: verwendet für Schrauben den Begriff 'Güte 10.9'

Festigkeit_TA_Zug.odt



Druckfestigkeit

Allzweckformel für Druckfestigkeit

$$\frac{\sigma_{\text{dgranz}}}{\sqrt{V}} = \sigma_{\text{dzul}} > \sigma_d = \frac{F_d}{S}$$

Festigkeitswerte σ_{dgranz}

gegen bleibende Verformung:

– $\sigma_{\text{dF}} \approx R_e$ bzw. $R_{p0,2}$ (Stahl)

gegen Bruch

– $\sigma_{\text{dB}} \approx R_m$ (Stahl)

– $\sigma_{\text{dB}} \approx 4 \cdot R_m$ (GGL)

FTM, MVK, TG:

Druckfestigkeit kommt im Abi selten vor, vermutlich weil Knickung i.d.R. die größere Belastung ist. Knickung steht nicht im Lehrplan.

Bilder ähnlich wie im Zugversuch

→ [EuroTabM] „Festigkeitslehre“, „Druckbeanspruchung“

→ [EuroTabM] „Festigkeitswerte“ einschließlich Fußnote

Gussseisen mit Lamellengrafit GJL hat eine sehr hohe Druckfestigkeit. (Eselsbrücke GJL – Guss Jron Lamelle). Im Englischen wird das I (großes India) öfters als J geschrieben, wenn Verwechslungsgefahr mit I (kleines Lima) besteht.

Bild / Spannungs-Dehnungsdiagramm von GJL

Vertiefung

Mbm: [EuroRBM]; TG: -----; FTM: [Böge Aufg.] 714ff „Beanspruchung auf Druck“

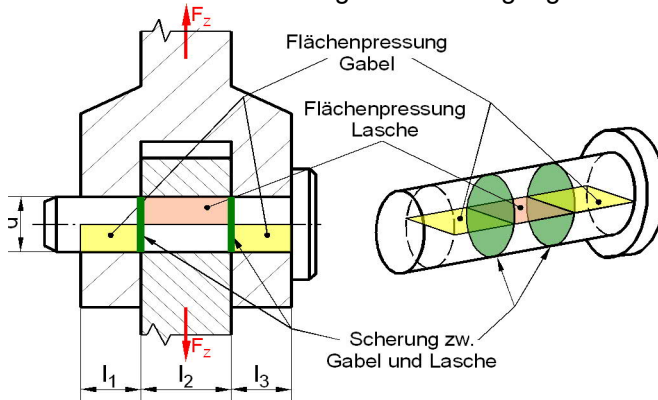
Festigkeit_TA_Druck.odt
Seitenumbruch



Scherung und Flächenpressung

treten oft gemeinsam auf

→ beide berechnen und die größere Auslegung wählen



Flächenpressung, Lochleibung

Allzweckformel für Flächenpressung

$$p_{zul} > p = \frac{F}{A} \quad \left[\frac{N}{mm^2} = MPa \right]$$

– p_{zul} : zulässige Flächenpressung

– A: Fläche senkrecht zur Kraft = projizierte Fläche

Festigkeitswerte p_{zul}

$$p_{zul} = \frac{R_e}{1,2} \quad \text{ohne Sicherheitszahl zu rechnen}$$

→ [EuroTabM46] S.42; [EuroTabM47] S.43

Scherfestigkeit und Schneidkräfte

Allzweckformeln für Scherung

$$\frac{\tau_{agrenz}}{v} = \tau_{azul} > \tau_a = \frac{F}{n \cdot S} \quad \left[\frac{N}{mm^2} = MPa \right]$$

– τ_{aB} : Scherfestigkeit; τ_{aF} : Scherfließgrenze

– S: Fläche zwischen zwei gegenläufigen Kräften

– n: Anzahl der Scherflächen

Festigkeitswerte τ_{agrenz}

– $\tau_{aF} \approx 0,6 \cdot R_e$ für zähe Werkstoffe (Stahl)

→ [EuroTabM46] S.41; [EuroTabM47] S.42 „Festigkeitswerte“, auch für andere Werkstoffe

wenn es halten muss (z.B. Bolzen)

– $\tau_{aBmax} \approx 0,8 \cdot R_{mmax}$

→ [EuroTabM46] S.365; [EuroTabM47] S.371 „Schneidkraft“

wenn es brechen soll (Scheren, Stanzen)

Auswahl treffen

Konstruktion auf die größere Belastung auslegen.

Normzahlen

Vertiefung

Im Laufe der Übungen Besonderheiten zeigen:

Sonderfälle

Lochleibung

Leibungsdruck: Flächenpressung für Bolzen oder Schrauben in Bohrungen. Es muss sich nicht um Passschrauben oder -bolzen handeln. [Duden 2006] Leibung (bevorzugt!), Leibung = innere Mauerfläche bei Wandöffnungen, innere Wölfläche bei Wölbungen.

Passfedern

Stanzen

Rollen- bzw. Hülsenketten

Video Herstellung „Kette Rollen“

FTM, MVK, TG:

AB Tafelzirkel

Scherung und Flächenpressung treten oft meist gemeinsam auf, deshalb muss man eine Konstruktion auf beide Belastungen hin prüfen und auf die größere auslegen. In neueren Abi-Aufgaben wurde dies oft nicht mehr ausdrücklich, wohl aber stillschweigend gefordert. Ein Konstrukteur muss die Flächenpressungen für die innere und äußeren Laschen (innere und äußere Fläche einer Passfeder ...) getrennt untersuchen, aber in Prüfungen genügt es meist, seine diesbezügliche Fähigkeiten an einer Fläche zu demonstrieren. Welche das ist, erfährt man im Abi bisher im Aufgabentext oder mit der Bemaßung – unbemaßte Elemente kann man nicht berechnen.

Leider ist es auch schon vorgekommen, dass man aus der Bemaßung schließen musste, ob auf Scherung oder Flächenpressung berechnet werden sollte – aber zu einfach soll ein Abi ja auch nicht sein :-)

Wenn man nicht weiß, welche Fläche gerechnet werden muss, stelle man die Frage:

Welche Fläche geht kaputt?

Einarbeiten: [Decker 2009] S.193, Bild 8.10

[Schneider21] Tabelle 8.50c: Grenzabscherkräfte je Scherfuge, abhängig von Schraubengröße, Festigkeitsklasse im Schaft, im Gewinde oder im Schaft von Passschrauben. → Im Bauingenieurwesen werden gewöhnliche Schrauben auf Scherung belastet.

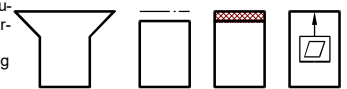
Fläche wird senkrecht zur Kraftrichtung ermittelt: z.B. Gleitlager: $A = d \cdot L$; z.B. Berührungsfläche Gewinde $p = F / (\pi \cdot x \cdot d_s \cdot x \cdot H_s) \times (P/m)$ mit m = Mutterhöhe und p/m = Anzahl tragender Gewindegänge. Weitere Darstellungen siehe → [EuroTabM] „Flächenpressung“

Im Beispiel: $p_{Lasche} = \frac{F}{b \cdot l_2}$ und $p_{Gabel} = \frac{F}{b \cdot (l_1 + l_3)}$

Im Abi muss bisher nur eine Variante (innen, außen) berechnet werden. Erkennlich ist dies daran, dass nur eine Variante bemaßt ist.

Maßnahmen zur Senkung der Flächenpressung oder Erhöhung der zul. Flächenpressung:

1) Verbreitern (Säulen, Stempel); 2) Härten; 3) Mörtel; 4) Planflächen 5) hydrostat. Lagerung



Flächenpressung p = „Druck“ zwischen festen Berührungsflächen. Da Oberflächen nicht genau plan sind, berühren sich 2 Teile nicht mit ihrer ganzen Fläche → zulässige Flächenpressungen sind deutlich kleiner als zul. Druckspannungen.

Vereinfachend wird angenommen, dass die Flächenpressung gleichmäßig über die projizierte Fläche verteilt ist. Gegenbeispiel Steckstift unter Biegelast: [Decker 2009] S.308f.

Die Kennwerte in [EuroTabM] „Flächenpressung“ sind zulässige Werte, Sicherheitszahlen sind nicht mehr nötig. Es scheint sich um eine Vereinfachung zu handeln, denn in [Roloff/Matek 1995] wird mit Sicherheitszahl gerechnet;

Verteilung der Flächenpressung in Zapfenlagern, zB. [Böge, Techn. Mechanik] S.227

$$\text{Im Beispiel: } \tau_a = \frac{F}{2 \cdot \pi \cdot d^2 / 4}$$

→ [EuroTabM] „Normzahlen“

– Mbm: [EuroRBM]; TG: Festigkeit_Ub_Abi

– FTM: [Böge Aufg.] 714ff „Beanspruchung auf Druck und Flächenpressung“; 714, 716, (717,) 718, 720, 721, 722; [Böge Aufg.] 738ff „Beanspruchung auf Abscheren“ 738, 739, 740, (742,) 743, 744, (748,) 749, 751

[Schneider21] S.8.52: „Die Tragsicherheit auf Lochleibung ist nachgewiesen, wenn die vorhandene Abscherkraft .. je Bauteil und je Schraube die Grenzlochleibungskraft .. nicht überschreitet.“ Tabelle 8.53 enthält Grenzlochleibungskräfte abhängig vom Lochabstand und für Lochdurchmesser etwa der Reihe mittel!!

Der kleine Unterschied in Kraft und Flächenpressung zwischen Nabe und Welle wird in der überschlägigen Berechnung nach DIN 6892 vernachlässigt (→ [Steinhilper 2007 I] S.519; [Decker 2009] S.292, [Haberhauer 2008] S.146).

[Roloff/Matek 2011] S.378: „Die ebenfalls auftretende Scherspannung ist bei zum Wellendurchmesser gehörigen Passfederabmessungen unkritisch.“ Dem Schüler nützt das aber nichts, weil in Aufgaben trotzdem häufig verlangt wird, auf Scherung zu rechnen.

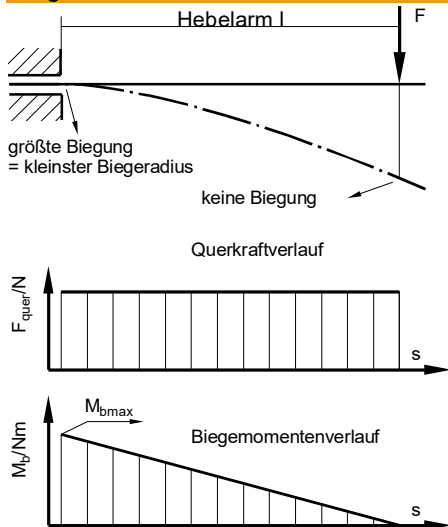
Flyerketten



Biegefestigkeit

wird bei äußerem Biegemoment $M_b = F \cdot l$ benötigt.

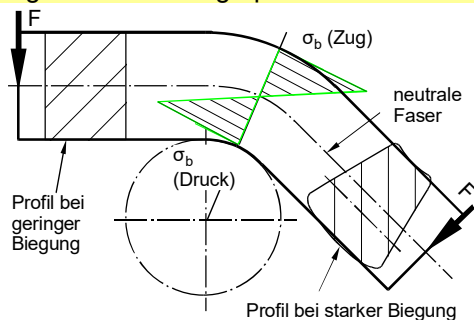
Biegemoment



Biegespannung

Biegemomente bewirken Verformungen und diese wiederum Spannungen:

Spannungsverlauf im Biegequerschnitt



- maßgebend die größte Biegespannung σ_b
- Material trägt außen mehr zur Biegefestigkeit bei

Allzweckformel für die Biegefestigkeit

$$\frac{\sigma_{b\text{grenz}}}{\gamma} = \sigma_{bzul} \geq \sigma_b = \frac{M_{b\text{max}}}{W} \quad \left[\frac{N}{mm^2} = \frac{Nm}{cm^3} \right]$$

- Biegehauptgleichung: $\sigma_b = M_{b\text{max}} / W$
- W: (axiales) Widerstandsmoment $[cm^3]$
- Kennzahl für die Biegetauglichkeit eines Profiles
- [EuroTabM46] S.45 „Widerstandsmoment“ für geometrisch einfache Querschnitte
- [EuroTabM46] S.45 „T-Stahl, U-Stahl, IPB...“ für handelsübliche Profile

Festigkeitswerte $\sigma_{b\text{grenz}}$

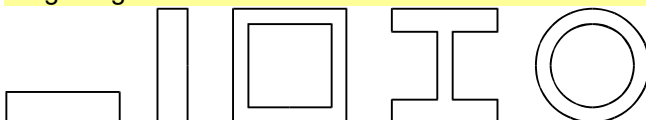
$\sigma_{bF} = 1,2 \times R_e$: Biegefließgrenze (gegen plast. Vfg.)
 $\sigma_{bB} = R_m$: Biegefestigkeit (gegen Bruch)
 statische Belastung, Stahl → [EuroTabM46] S.41
 σ_{bSch} , σ_{bW} : dynamische Belastung → [EuroTabM46] S.46

Vertiefung

Böge 835ff

Darstellung: [Haberhauer 2008] S.9ff

Biegetauglichkeit verschiedener Profile

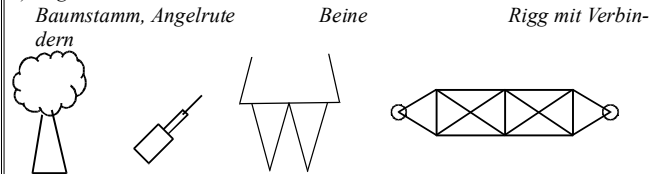


FTM, MVK, TG:

- 1) Tafellineal: Ein Ende mit einer Hand fest „einspannen“, das andere Ende mit einem Finger biegen?
- 2) Wo ist das Lineal am stärksten gebogen?
- 3) Wodurch wird Biegung bewirkt?

Kräfte auf ein Bauteil bewirken Biegemomente, diese biegen das Bauteil. Die Verformung führt zu internen Spannungen.

- 4) Begründen Sie die Form des



Die sogenannte Blutrinne in Schwertern dient ebenfalls der Senkung des Gewichtes ohne wesentliche Beeinträchtigung der (Biege-)Festigkeit.

Außen: Zugspannungen σ_z

Innen: Druckspannungen σ_b

Mitte: neutrale Faser ohne axiale Spannungen

Die Zugspannungen außen noch stärker, sodass der Bruch gewöhnlich außen beginnt.

Anforderung eines Herstellers von Lackierrobotern: „Die Schlauchführung soll im Roboter durch die neutrale Phase erfolgen.“ heißt, die Schläuche sollen im Inneren der Roboterarme geführt werden, sind dadurch von der Umgebung geschützt und erfahren weniger Biegung.

[Haberhauer 2008]: Querschnittsformen, die an der Randfaser eine große Materialanhäufung aufweisen ... haben einen wesentlich größeren Widerstand gegen Biegung als mittig-versteifte Querschnittsformen.

Skythischer Reiterbogen → [SdW] 08/91

Bisher kannten die Schüler als Kennwert für ein Profil nur die (Querschnitts-)Fläche A, aber es gibt auch andere Kennwerte, die andere Eigenschaften eines Profils beschreiben:

- (axiales) Widerstandsmoment W, z.B. bei Belastung mit einem Biegemoment.
- polares Widerstandsmoment W_p , z.B. bei Belastung mit einem Torsionsmoment.
- Flächenmoment 0. Grades (Querschnittsfläche A), z.B. bei Zugbelastung.
- Flächenmoment 1. Grades, z.B. bei Drehbeschleunigung, Pirouetteneffekt
- Flächenmoment 2. Grades (Flächenträgheitsmoment I), z.B. bei Knickung, Durchbiegung

Die Spannung, bei der unter Biegebelastung die plastische Verformung beginnt, heißt Biegefließgrenze σ_{bf} . Sie ist etwas größer als die Streckgrenze R_e , da beim Biegen die äußeren Atome von den inneren auch dann noch auf Position gehalten werden, wenn R_e schon überschritten ist. [Decker 2009] S.30, Lämpke: Einführung in Festigkeitsberechnung
 „Biegeversuche zur Ermittlung von Werkstoffkennwerten haben nur wenig Bedeutung, z.B. für spröde Werkstoffe... Das Biegeverhalten homogener, zäher Werkstoffe lässt sich bis zum Erreichen der Streckgrenze.. hinreichend genau aus den Kennwerten des Zugversuchs abschätzen.“ [Bargel/Schulze 2005] S.101.]

Visualisierung

FO skythischer Kompositbogen

Begründen Sie die Form einer Blattfeder, Balkenbrücke, eines Baumstammes, einer Angelrute? Warum wird eine (Vogel-)Feder außen dünner?

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 835-863 Freitragler mit Einzellasten

TG: Festigkeit Ub „Abi „Biegefestigkeit“ Aufg. 3.1-3.3

Überschrift

- 5) Bewerten Sie die gezeichneten Profile

Fachwerkbrücken und I-Träger bringen Material in Ober- und Untergurt. Die Streben dazu schon halten vornehmlich die Gurte zusammen.

- 6) Begründen Sie den Aufbau von Wellpappe.

Wellpappe ist ähnlich wie die Fachwerkbrücke aufgebaut. Ihre Biegefestigkeit ist richtungsabhängig (anisotrop) und vermutlich nicht der Hauptgrund für den Aufbau. Dies sind eher die Druckfestigkeit und die Knickfestigkeit (Widerstandsmoment!), alle bei geringer Dichte.

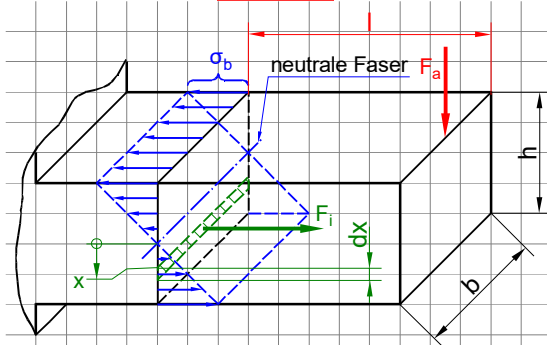


Biegehauptgleichung

Herleitung für ein Rechteckprofil

(gerade Biegung)

Äußeres Moment $M_b = F_a \cdot l$



Inneres Moment $M_i = \sum F_i \cdot x$ bzw. $M_i = \int F_i \cdot dx$

Es muss gelten: äußeres = inneres Moment

$$M_b = \sum M_i \quad \text{oder} \quad M_b = \text{Summe aller } M_i$$

$$dA(x) = b \cdot dx$$

$$\sigma(x) = \sigma_b \cdot \frac{x}{h/2}$$

$$dF_i(x) = \sigma(x) \cdot dA(x) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot x \cdot dx$$

$$dM_i(x) = x \cdot dF_i(x) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$M_b = \int_{-h/2}^{+h/2} dM_i(x) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \int_{-h/2}^{+h/2} x^2 \cdot dx = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \left(\frac{(+h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right) = \sigma_b \cdot \frac{2 \cdot b}{h} \cdot \frac{h^3}{12} = \sigma_b \cdot \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Biegehauptgleichung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W}$$

(axiales) Widerstandsmoment W

für ein Rechteckprofil

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

= Maß für den Widerstand eines Profils gegen Biegung

- hängt von Form, Maßen des gebogenen Profils ab und wird in der Praxis aus Tabellen entnommen
- Biegeachse beachten

Herleitung für ein Rundprofil

$$dA = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

$$\sigma(x) = \sigma_b \cdot \frac{x}{r}$$

$$dF(x) = \sigma(x) \cdot dA(x) = \sigma_b \cdot \frac{x}{r} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

$$dM(x) = dF(x) \cdot x = \sigma_b \cdot \frac{x^2}{r} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$$

$$M_b = \frac{2 \cdot \sigma_b}{r} \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{2 \cdot \sigma_b}{r} \cdot \frac{\pi r^4}{8} = \sigma_b \cdot \frac{\pi r^4}{4}$$

$$M_b = \sigma_b \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

Herleitung im allgemeinen Fall

$$dA = b(x) \cdot dx \quad s(x) = x \cdot s_0$$

$$\int dF(x) = \int s(x) \cdot dA(x) = s_0 \cdot \int x \cdot dA = 0$$

→ neutrale Faser = Schwerlinie

FTM, TG: Herleitung: MVK: überspringen
 σ für Normalspannungen

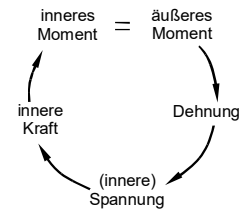
1) Ein:

Bei der Berechnung der maximalen Biegespannung geht man von kleinen Biegekrümmungen (großen Biegeradien) und den folgenden, vereinfachenden Voraussetzungen aus:

- Gerade Biegung heißt, dass sie um eine Hauptachse stattfindet (F_a greift mittig an).
- Das äußere Biegemoment M_b bewirkt einachsige Dehnung / Stauchung senkrecht zum Biegequerschnitt, der Querschnitt wird nicht verändert. Tatsächlich verändert sich der Querschnitt bei größeren Biegungen und die neutrale Faser verschiebt sich nach innen.

- Die Faserschicht, die ihre ursprüngliche Länge beibehält, heißt neutrale Faser (Nulllinie). Das Maß der Dehnung / Stauchung im restlichen Querschnitt hängt aus geometrischen Gründen linear vom Abstand von der neutralen Faser ab.
- Durch die Dehnung entstehen außen Zug- und innen Druckspannungen. Bei Werkstoffen und Belastungen, für die das Hooke'sche Gesetz annähernd gilt, hängen Dehnung und Spannung im elastischen Bereich linear zusammen. Es ergibt sich der skizzierte lineare Verlauf der Normalspannungen senkrecht zum Querschnitt.

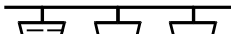
Für Festigkeitsberechnungen rechnet man mit der maximalen Biegespannung σ_b (innen bzw. außen am Biegequerschnitt), weil dort die Bauteile zuerst kaputt gehen.



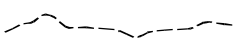
Summe ↔ Integral

Wird Kies mit einer Eimerkette transportiert, kann man die Netto-Gewichte der Eimer addieren = Summe. Bei einem Förderband muss man integrieren = kleinste Abschnitte addieren

Summe Σ



Integral \int



2) Kann übersprungen werden.

- Wir betrachten ein schmales Flächenelement dA (grün), das parallel zur neutralen Faser (= Biegeachse) liegt. Die Flächenelemente $dA(x)$ werden so gewählt, weil innerhalb jeden Elementes der Hebelarm x zur Biegeachse und die Spannung $\sigma(x)$ konstant sind.
- Die Größe der Fläche dA hängt von der Breite b und von dx ab. Im Rechteckprofil ist b konstant, bei anderen Profilen abhängig von x . In diesem allgemeinen Fall schreibt man $dA(x)$ und $b(x)$ und erhält ein komplizierteres Integral.
- Die Spannung $\sigma(x)$ im betrachteten Element wird mit dem Strahlensatz aus der maximalen Biegespannung σ_b an einer Außenseite des Biegequerschnittes abgeleitet.
- Die Normalspannungen bewirken in jedem Flächenelement Kräfte $F_i(x) = \sigma(x) \cdot dA(x)$. F_i bewirken über den Hebelarm zur Biegeachse innere Biegemomente M_i .

Das innere Biegemoment dM_i in jedem Flächenelement ist Moment = Kraft \times Hebelarm. Alle Spannungen sind Normalspannungen senkrecht zum Biegequerschnitt.

- Die Summe aller inneren Biegemomente M_i muss dem äußeren Biegemoment M_b das Gleichgewicht halten.
- Auch das Integral ist übrigens eine weitere Vereinfachung, weil Werkstoffe nicht infinit homogen sind (Kristalle, Gitterfehler, Atome ...).
- Die maximale Biegespannung σ_b hängt vom Biegemoment M_b und einem Kennwert, dem axialen Widerstandsmoment W , ab.
- Das Widerstandsmoment W ist ein profilspezifischer Flächenkennwert, der die Eigenschaften der Fläche bei Biegung beschreibt. Der Querschnitt einer Fläche ist auch nur ein (sehr bekannter) Kennwert, der zum Beispiel für den Schneidstoffverbrauch beim Durchsägen gebraucht wird. Es gibt weitere Kennwerte für verschiedene Anforderungen.

3) Zwingend

Aus dem Biegemoment und einem Kennwert für das Profil ergibt sich der Betrag der maximalen Biegespannung.

Die Bezeichnung 'axial' ist nicht zwingend erforderlich, dient aber der Unterscheidung zum polaren Widerstandsmoment.

Kombinationen aus mehreren Profilen

Warum entspricht das Widerstandsmoment eines Kastenprofils nicht der Differenz zwischen den außen und innen begrenzenden Rechtecken? → W herleiten!

Nicht unterrichten, werden aus Tabellen entnommen

Biegespannung abhängig vom Abstand zur Mittelachse

– Mathelehrer: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$ von a bis b

– [Schneider21] S2.23: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

Es ergeben sich die folgenden Änderungen:

Für beliebige Profile und Biegeachsen ist die Breite nicht konstant. Bei unsymmetrischen Profilen muss zunächst die Lage der neutralen Faser bestimmt werden. Dazu wird die Spannung auf die Vergleichsspannung σ_0 im Abstand 1 von der neutralen Faser bezogen.

Zur Bestimmung der Lage der neutralen Faser wird die Gleichgewichtsbedingung $\sum F=0$ angesetzt. Beim Term $\int dA(x)$ handelt es sich um das Flächenintegral 1. Grades bezüglich der neutralen Faser. Da es gleich null ist, muss die neutrale Faser in der Schwerlinie liegen.

Festigkeit_TA_Biegehauptgleichung.odt

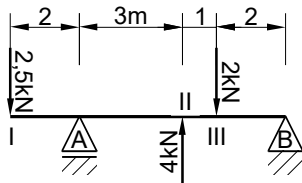




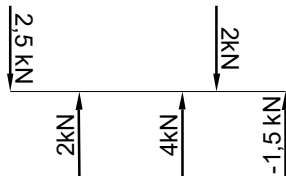
Max. Biegemoment M_{bmax} ermitteln

Grafische Lösung

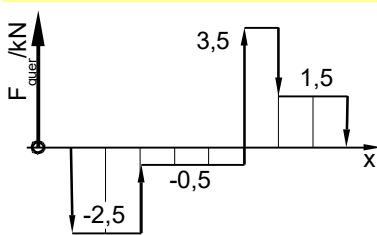
Beispiel 1



Freimachen (Lageskizze)



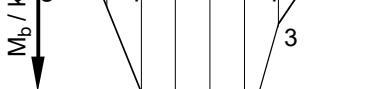
Querkraftverlauf



Biegemomentenverlauf

$M_b = 0$ gilt für alle äußeren Lager, wenn sie drehbar gelagert sind.

Gegenbeispiel: Balkonplatte



Schlussfolgerungen für KA, Abi & Co für Punktlasten gilt:

– M_{bmax} kann nur an einem inneren Kräfteinleitungspunkt liegen („innen“ = „liegt zwischen anderen Kräften“)

Diese (im Abi bisher max. 3) Punkte kann man ohne grafische Lösung relativ schnell berechnen

– wo der Querkraftverlauf die Nulllinie schneidet

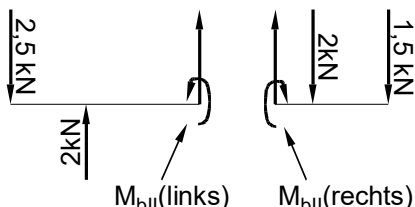
– Querkraftverlauf und Nulllinie können sich mehrfach schneiden.

Rechnerische Lösung aus der Lageskizze

ohne Kenntnis des Biegemomentenverlaufs

Freischneiden (!)

an der Stelle II:



Biegemomente M_b nach links oder rechts

Stelle II von links $M_{bII}(li) = 2,5 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 6,5 \text{ kNm}$

Stelle II von rechts $M_{bII}(re) = -1,5 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = -6,5 \text{ kNm}$

Stelle A von links $M_{bA} = 2,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 5,0 \text{ kNm}$

Stelle III von rechts $M_{bIII} = -1,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -3 \text{ kNm}$

$M_{bmax} = 6,5 \text{ kNm}$ (der größte der Beträge)

FTM, MVK, TG: Die grafische Lösung des Biegemomentes ist im Lehrplan TGT zwar nicht explizit aufgeführt, aber gelegentlich doch in Prüfungen verlangt: tgt_NP2010/11-2 Motorradbühne, Aufgabe 3.1 (Querkraftlinie)

Achtung: Tafel wird knapp

1) Beispiel vorgeben

2) Lageskizze, Querkraftverlauf, Biegemomentenverlauf zur Anschaulichkeit genau darunter zeichnen..

Auflagerkräfte ermitteln

$$\Sigma M_A = 0 = 2,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 4 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 2 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + F_B \cdot 6 \text{ m} \rightarrow$$

$$F_B = \frac{-5 - 12 + 8}{6} \text{ kN} = -1,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = -2,5 \text{ kN} + F_A + 4 \text{ kN} - 2 \text{ kN} + (-1,5 \text{ kN}) \rightarrow F_A = 2 \text{ kN}$$

oder grafisch per Schlusslinienverfahren

Biegemomente M_b aus Querkraftverlauf

3) Nach dem Querkraftverlauf, parallel zum Biegemomentenverlauf.

Das Moment $M_{b,i}$ baut auf M_b auf, das vereinfacht die Rechnung, was ja der Sinn grafischer Lösungen ist. Hinweis: Vor Einführung des Taschenrechners etwa 1970 wurden alle, danach noch sehr viele Bauwerke mit grafischen Methoden berechnet.

$$M_I = 0 \text{ kNm}$$

$$M_A = M_I - 2,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -5 \text{ kNm}$$

$$M_{II} = M_A - 0,5 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = -6,5 \text{ kNm}$$

$$M_{III} = M_{II} + 3,5 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} = -3,0 \text{ kNm}$$

$$M_B = M_{III} + 1,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 0$$

Die Berechnung der Biegemomente beginnt hier von links, deshalb ergeben sich mit den üblichen Vorzeichenregeln negative Werte. Von rechts wären sie positiv.

Biegemomentenverlauf = Flächenintegral der Querkraft

Der Biegemomentenverlauf entspricht der Querkraftfläche (= Flächenintegral der Querkraft).

4) Nachträgliche Erklärung, nachdem der Biegemomentenverlauf skizziert ist: Querkraftverlauf abdecken, dann die Abdeckung nach rechts (links) wegziehen. Der Biegemomentenverlauf entspricht der jeweils sichtbaren Fläche unter dem Querkraftverlauf.

$$M_b(x) = \int F(x) dx$$

Lösungsmöglichkeiten für M_{bmax}

– M_{bmax} mit Biegemomentenverlauf ermitteln

.. oder ..

– Querkraftverlauf zeichnen und M_b dort berechnen, wo die Querkraftlinie die Nulllinie kreuzt

.. oder .. (meist schneller)

– M_b an allen inneren Kräfteinleitungspunkten berechnen und M_{bmax} nach Betrag auswählen

[Skolaut 2014] S.68 verwendet statt „von links / rechts“ die Begriffe „positives/ negatives Schnittufer“ → VZ klären, Erwähnen zur Veranschaulichung

Wenn man alle Momente an einem Bauteil berechnet, muss ihre Summe gemäß den Gleichgewichtsbedingungen der Statik Null ergeben. Das gilt für jedes Teil und auch für jedes Bruchstück davon. Deshalb schneidet man das Teil gedanklich an der untersuchten Stelle auf und betrachtet nur eine Seite (eines der beiden „Bruchstücke“). Bei beiden Teilen müssen die Momente einschließlich des Biegemomentes im Gleichgewicht stehen.

Links unten sind die Momente an der Stelle II einmal von links $M_{bII(li)}$ und einmal von rechts $M_{bII(re)}$ berechnet. In beiden Gleichungen entfällt $F_A = 1 \text{ kN}$, weil sein Hebelarm 0 ist. Die beiden Momente $M_{bII(li)}$ und $M_{bII(re)}$ müssen sich gemäß der Gleichgewichtsbedingung aufheben, und haben deshalb den gleichen Betrag, aber unterschiedliche Vorzeichen. Innerhalb der Gleichungen verwenden wir das gewohnte Koordinatensystem mit der positivem VZ bei ccw. Bei der Auswahl von M_{bmax} zählt nur der Betrag (ohne Vorzeichen).

In der Praxis kann man zur Kontrolle beide Seiten rechnen, aber nötig ist es nicht. Es genügt, eines der Momente von der „bequemen“ Seite her zu rechnen. Im Abi sollte man die Kontrollrechnung vermeiden, weil manchmal ungenaue Werte vorgegeben werden, die von links und rechts gerechnet unterschiedliche Biegemomente ergeben, und das kann verwirren. Bei Systemen, die statisch im Gleichgewicht sind, dürfte das nicht vorkommen.

Im Abi keine Kontrollrechnungen für M_b !!

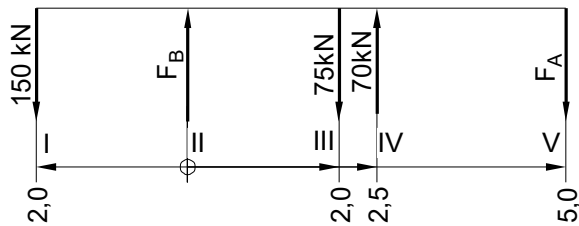
Links stehen die Rechnungen für jeden inneren Kräfteinleitungspunkt, an der Stelle II sogar doppelt. Da man diese Rechnungen ohne die obigen Vorbereitungen (außer Lageskizze) durchführen kann, ist dies im Abi der schnellste Weg zu M_{bmax} . Deshalb

M_{bmax} an inneren Kräfteinleitungspunkten suchen.

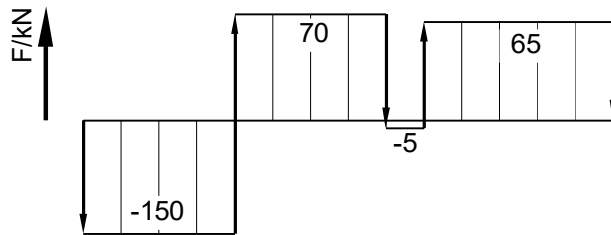


Beispiel 2

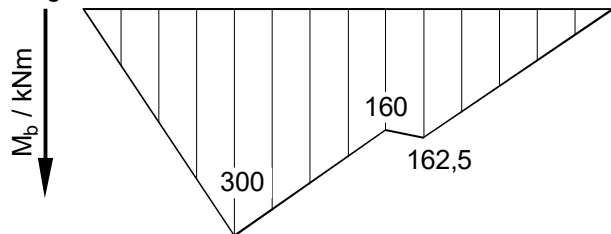
Lageskizze



Querkraftverlauf



Biegemomentenverlauf



Auflagerkräfte ermitteln

$$\sum M_{II} = 0 = +150 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 75 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 70 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} - F_B \cdot 5 \text{ m} \Rightarrow$$

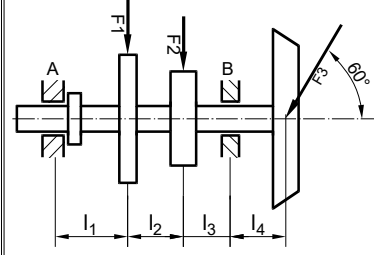
$$F_A = \frac{+150 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 75 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + 70 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 65 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = -150 \text{ kN} + F_B - 75 \text{ kN} + 70 \text{ kN} - 65 \text{ kN} \Rightarrow F_B = 220 \text{ kN}$$

oder grafisch per Schlusslinienverfahren

Beispiel Getriebewelle

Umstellen auf Kraftangriffspunkt am Teilkreis



Ermittlung der Eckpunkte

Von links nach rechts:

$$M_I = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{II} = 0 \text{ kNm} + 150 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = 300 \text{ kNm}$$

$$M_{III} = 300 \text{ kNm} - 70 \text{ kN} \cdot 2,0 \text{ m} = 160 \text{ kNm}$$

$$M_{IV} = 160 \text{ kNm} + 5 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} = 162,5 \text{ kNm}$$

$$M_V = 162,5 \text{ kNm} - 65 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} = 0$$

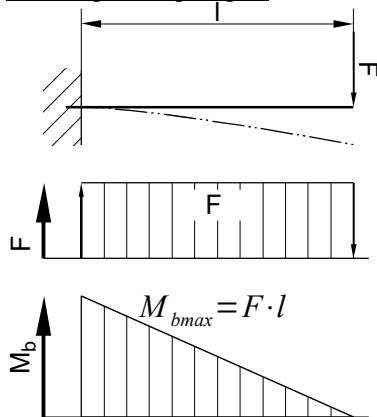
Vertiefung

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 864 ff; TG: Beispiel HP 1997/98-1 Verladeanlage

Formeln im Tabellenbuch: unbrauchbar

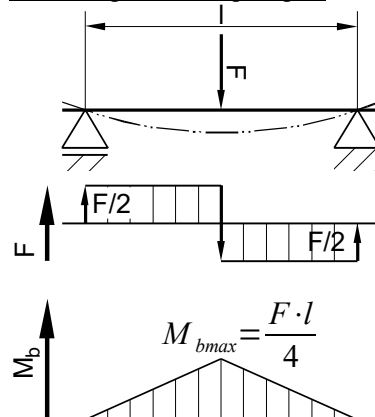
- behandeln nur Sonderfälle, z.B. zentrische Last
- führen mit der biegesteifen Einspannung in die Irre

einseitig starr gelagert



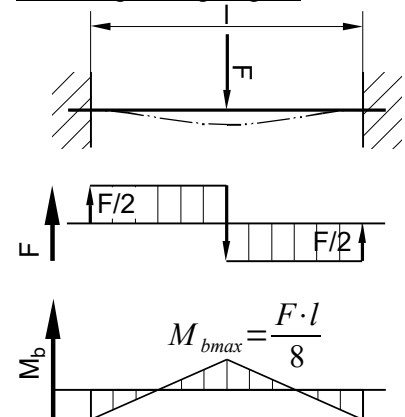
Das maximale Moment wird wg. des max. Hebelarmes im Lager erreicht, nach außen nimmt es linear ab. Elastische Verformung im Lager ändert nichts!

beidseitig drehbar gelagert



Halbe Kraft je Seite mal halbe Länge zum max. Moment = Viertel Moment

beidseitig starr gelagert



Bei vollkommen biegesteifer Einspannung ist die Steigung des gebogenen Balkens in den Lagern und in der Mitte waagrecht. Aus Symmetriegründen müssen dort die Biegemomente gleich groß sein.

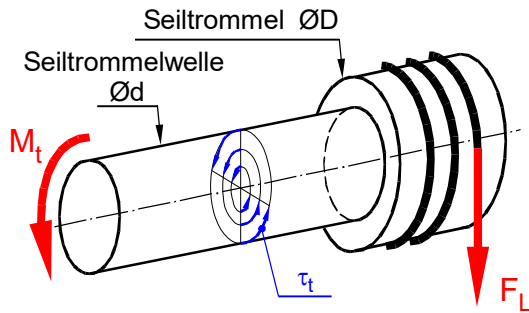
Wenn die Einspannung nachgibt, nähert sich die Belastung der Situation „beidseitig drehbar“ → Deshalb sollte diese zur Sicherheit immer angenommen werden. Elastische Lagerung ist statisch überbestimmt und nur schwer zu berechnen (E-Modul, Temperaturexpansion, Spannungen, exakte Maße usw.)



Torsionsfestigkeit

= Spannung durch Verdrehung „in sich“

Typische Aufgabe: Seilwinde



Last F_L erzeugt an der Seiltrommel ($\varnothing D$) ein Torsionsmoment M_t

$$M_t = F_L \cdot \frac{D}{2}$$

Seiltrommelwelle ($\varnothing d$) muss M_t aushalten

Allzweckformeln für Torsionsfestigkeit

$$\frac{\tau_{\text{igrenz}}}{\sqrt{}} = \tau_{\text{zul}} > \tau_t = \frac{M_t}{W_p}$$

– Torsionshauptgleichung: $\tau_t = M_t / W_p$

– W : Polares Widerstandsmoment [cm^3]

→ Kennzahl für die Verdrehfestigkeit eines Profiles

→ [EuroTabM46] S.45 „Widerstandsmoment“ für geometrisch einfache Querschnitte

Festigkeitswerte τ_{igrenz}

$\tau_{\text{tF}} = 0,7 \times R_e$: Torsionsfließgrenze (Stahl gg. plast. Vfg.)

$\tau_{\text{tB}} = 0,8 \times R_m$: Torsionsfestigkeit (gegen Bruch)

statische Belastung, Stahl → [EuroTabM46] S.41

τ_{tSch} , τ_{tW} : dynamische Belastung → [EuroTabM46] S.46

Vertiefung

TG: Festigkeit_Ub_Abi.odt

FTM: [Böge Aufg.] S.809ff

815ff: Aufgaben mit Verdrehwinkel auslassen

826 Lösung durch Ausprobieren

831: kombinierte Aufgaben

FTM, MVK, TG: bis Formeln für Torsionsfestigkeit.

1) Torsionsspannung analog zur Biegespannung schnell erklären.

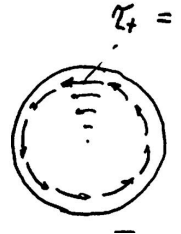
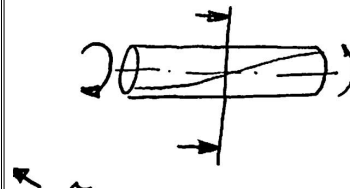
2) Herleitung der Torsionshauptgleichung nur bei viel Zeit.

- τ für Schubspannungen
- Als Torsionsspannung τ_t bezeichnet man die innerhalb der Spannungsverteilung maximale Torsionsspannung an der Oberfläche, die auch zum Bruch führt.
- Die Spannung verläuft im Innern theoretisch im Kreis. Tatsächlich gibt es Schubspannung, die zum typischen Torsionsbruch mit einer wellenförmigen Bruchfläche führt.

AM Kreide bis zum Bruch verdrehen

Erklärung Schubspannung bei Torsion

Torsion



Die maximale Torsionsspannung τ_t hängt vom Torsionsmoment M_t und einem profilspezifischen Kennwert, dem polaren Widerstandsmoment W_p , ab. Aus dem Torsionsmoment und einem Kennwert für das Profil ergibt sich der Betrag der maximalen Torsionsspannung.

Das axiale Widerstandsmoment hängt von Form und Maßen des verdrehten Profils ab. „Tordieren“ steht nicht im [Duden 2006], ist aber in der Technik gebräuchlich (z.B. [Böge, Techn. Mechanik]). Im Duden, 15.Auflage, von 1961 stehen „Torsion“ (=Verdrehung, Verdrehung, Verwindung) und „torquieren“ (= techn. krümmen, drehen; veraltet für peinigern)

Verdrehwinkel

(Nur zur Info für Aufgaben im [Böge Aufg.]

$$\phi [^\circ] = \frac{\tau_t \cdot l}{G \cdot d} \cdot \frac{360^\circ}{\pi} = \frac{M_t \cdot l}{W_p \cdot G \cdot d} \cdot \frac{360^\circ}{\pi} \quad \text{mit}$$

– l , d : Länge und \varnothing der verdrehten Welle

– G : Gleitmodul des Werkstoffes (vgl. E-Modul), $G(\text{Stahl}) = 80 \text{ kN/mm}^2$

TG: Nur auf Nachfrage

Torsionshauptgleichung

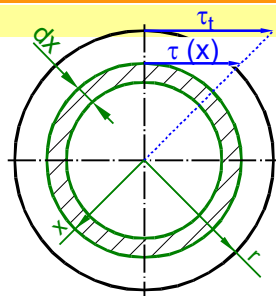
Herleitung für ein Rundprofil

Kreisringfläche

$$dA(x) = 2\pi \cdot x \cdot dx$$

Spannung im Kreisring

$$\tau(x) = \tau_t \cdot \frac{x}{r}$$



$$dF(x) = \tau(x) \cdot dA(x) = \tau_t \cdot 2\pi \cdot x^2 \cdot dx$$

$$dM = x \cdot dF(x) = \tau_t \cdot 2\pi \cdot x^3 \cdot dx$$

$$M_t = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r} \cdot \int_0^r x^3 \cdot dx = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{r^4}{4} = \tau_t \cdot \frac{\pi \cdot r^3}{2} = \tau_t \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

polares Widerstandsmoment W_p

$$M_t = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r_a} \cdot \int_{r_i}^{r_a} x^3 \cdot dx = \tau_t \cdot \frac{2\pi}{r_a} \cdot \frac{r_a^4 - r_i^4}{4} = \tau_t \cdot \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$$

Bei der Berechnung der maximalen Torsionsspannung geht man von kleinen Torsionswinkeln und den folgenden Voraussetzungen aus:

- Das äußere Torsionsmoment M_t bewirkt einachsige Dehnung, der Querschnitt wird nicht verändert. Tatsächlich? Das Torsionsmoment wirkt genau um die Stabachse.
- Durch die Dehnung entstehen Schubspannungen. Bei Werkstoffen und Belastungen, für die das Hooke'sche Gesetz annähernd gilt, hängen Dehnung und Spannung im elastischen Bereich linear zusammen. Es ergibt sich der skizzierte lineare Verlauf der Schubspannungen parallel zum Querschnitt.

Wir betrachten einen schmales kreisförmiges zentrisches Flächenelement. Dieser Ansatz ist zweckmäßig, weil darin Hebelarm und Spannung konstant sind. Die Fläche wird nicht mit der Kreisringformel, sondern mit Umfang mal dx berechnet. Dies ist korrekt, weil dx sehr klein ist.

Die Spannung τ im betrachteten Element wird auf die maximale Torsionsspannung τ_t an der Oberfläche des Profils bezogen, weil nur diese für die Festigkeitsberechnung interessiert.

Die Schubspannungen bewirken in jedem Flächenelement Kräfte. Die Kraft F im Flächenelement ergibt sich aus Spannung und Fläche.

Die Kräfte bewirken über den Hebelarm zum Mittelpunkt innere Torsionsmomente M . Das innere Torsionsmoment dM aus dem Flächenelement ergibt sich aus Moment = Kraft x Hebelarm. Alle Schubspannungen verlaufen tangential.

Die Summe aller inneren Torsionsmomente M muss dem äußeren Torsionsmoment M_t das Gleichgewicht halten.

Das Rohrprofil wird wie das Rundprofil (voll) berechnet, nur die Grenzen des Integral reichen vom inneren bis zum äußeren Radius (r_i , r_a) bzw. Durchmesser (d , D).

Festigkeit_TA_Torsion.odt

Manueller Seitenumbruch

Übersetzungen

Bauarten

- 2) Nummerierung erfolgt in der Reihenfolge des Kraftflusses
- 3) Drehrichtung des Riemetriebes?

Größen

Bestimmungsgrößen

Übertragende Größen

Übertragung ohne Verluste

Übersetzung i ohne Verluste

wird bei Momenten wie der Wirkungsgrad berechnet.
Entnahme aus dem Tabellenbuch.

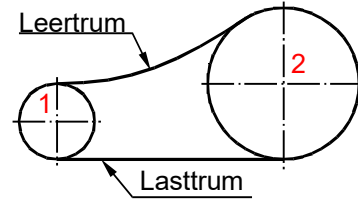
Übersetzung mit Verlusten

aus $\eta = \frac{P_2}{P_1}$ folgt

Sonstiges

Riementrieb

→ [EuroTabM] „Übersetzungen“



n_x Drehzahl
 M_x Drehmoment
 d_x RiemenscheibenØ
 v Riemengeschwindigkeit
 F Zugkraft

$$v = \pi \cdot d_x \cdot n_x \Rightarrow$$

$$d_1 \cdot n_1 = \frac{v}{\pi} = d_2 \cdot n_2$$

$$F \cdot \frac{d_x}{2} = M_x \Rightarrow \frac{M_1}{d_1} = \frac{F}{2} = \frac{M_2}{d_2}$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right) = \frac{d_2}{d_1}$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2 \pi \cdot n_2 \cdot M_2}{2 \pi \cdot n_1 \cdot M_1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{M_2}{M_1}$$

$$\downarrow$$

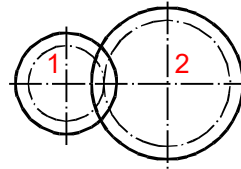
$$i \cdot \eta = \frac{M_2}{M_1}$$

Tatsächlich haben Riementriebe auch bei der Drehzahl Verluste (Schlupf), aber dies wird am TG vernachlässigt.

$$P_{ab} = F_{ab} \cdot v_{ab}$$

Zahnradtrieb

→ [EuroTabM] „Übersetzungen“



n_x Drehzahl
 M_x Drehmoment
 z_x Zähnezahlen
 v Umfangsgeschw.
 F Zahnkraft

$$v = z_x \cdot \pi \cdot m \cdot n_x \Rightarrow$$

$$z_1 \cdot n_1 = \frac{v}{\pi \cdot m} = z_2 \cdot n_2$$

m: Modul = Zahnabstand, bezogen auf den TeilkreisØ, ist für Zahnräder im Eingriff gleich.

$$F \cdot \frac{m \cdot z_x}{2} = M_x \Rightarrow \frac{M_1}{z_1} = \frac{F \cdot m}{2} = \frac{M_2}{z_2}$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right) = \frac{z_2}{z_1}$$

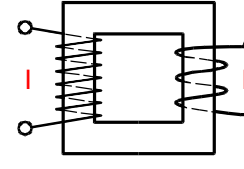
$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{2 \pi \cdot n_2 \cdot M_2}{2 \pi \cdot n_1 \cdot M_1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{M_2}{M_1}$$

$$\downarrow$$

$$i \cdot \eta = \frac{M_2}{M_1}$$

Transformator

→ [EuroTabM] „Transformator“



I_x Strom
 U_x Spannung
 N_x Windungszahlen
 Φ magn. Induktionsfluss
 Φ' = Induktion B x Fläche A

$$\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot N_x \cdot I_x \cdot \frac{A}{l} \Rightarrow$$

$$N_1 \cdot I_1 = \Phi \cdot \text{const} = N_2 \cdot I_2$$

μ_0, μ_r : magn. Feldkonstanten
 A, l : Länge und Querschnitt des Eisenkerns

$$U_x = + N_x \cdot \dot{\Phi} \Rightarrow \frac{U_1}{N_1} = \dot{\Phi} = \frac{U_2}{N_2}$$

$$i = \frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2 \cdot U_2}{I_1 \cdot U_1} = \frac{1}{i} \cdot \frac{U_2}{U_1}$$

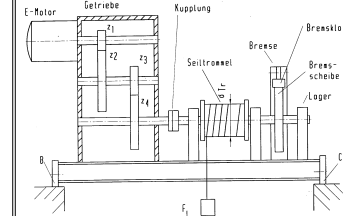
$$\downarrow$$

$$i \cdot \eta = \frac{U_2}{U_1}$$

$$P = \Phi \cdot \dot{\Phi} \cdot \text{const}$$

nur TG

1) Zeichnung ?



Beim Zahnrad wird die Drehzahl verlustfrei übersetzt, beim Riementrieb gibt es in der Realität Schlupf, im Abi wird Schlupf vernachlässigt. Trafo soll die Analogie verdeutlichen, kann aber entfallen.

4) Welche Größen bestimmen Leistung und Verhalten eines Getriebes, welche Größen übertragen die Leistung ?

Φ' [Vs oder Wb]

5) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Bestimmungs- und übertragenden Größen ?

Da die Übertragenden auf beiden Seiten gleich sind, gilt ..., damit können die Übersetzungsregeln hergeleitet werden

$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am; $\mu_r \approx 1$ (für Luft)

6) Weiterer Zusammenhang ?

Teilkreisdurchmesser $m \cdot z$ Skizze

7) Übersetzung ?

Momente in Klammern, weil sie Verlusten unterliegen; gilt auch für Drehzahl bei Riementrieben.

8) Einbeziehung der Verluste ?

Im TabB nachtragen lassen

Das Produkt der bestimmenden Größen bleibt konstant (Goldene Regel der Mechanik).

Ausbauen !

Vertiefung: konstant sind: Gesamtquerschnitte der beiden Trafospulen, Arbeit bei verschiedenen Wegen, Hebelarmen, Flaschenzug usw.

Vertiefung

Getriebe_Ub

Andere Beispiele

Die 5 einfachen Maschinen der Antike: Welle und Rad, Hebel, Flaschenzug, Keil, Schraube

Kraft x Weg = const. (bei verschiedenen Steigungen, Schraubenschlüssel auf Axialbewegung)

OH-Projektor

Lichtstärke x Bildgröße = const.



Wälzlager, Konstruktion & Co

Wiederholung Statik mit Aufgaben zu Wälzlager und Konstruktion

TG: Die letzte LPE in tgtm ist nicht scharf abgegrenzt und es sind noch Überraschungen im Abi möglich. Das systematische Unterrichten der Inhalte kann also viel Zeit kosten ohne Garantie, alles abzudecken. Außerdem ist kurz vor dem Abi Wiederholung sinnvoll und wann, wenn nicht jetzt, sollten SuS ihr gesammeltes Wissen und Können anwenden können. Deshalb unterrichte ich dieses Thema, indem ich alte Abi-Prüfungen löse und Fragen bei Bedarf beantworte.

tgtm HP 2014/15-4 Antriebseinheit

technische Diagramme

Blockschaltbild, Energieflussdiagramm (Sankey-Diagramm)

Übersetzungen (Wdhg.)

Rillenkugellager

Wälzlager: Lagerarten, Radiallast, Axiallast, Lebensdauerstreuksurve

→ TA Wälzlager auslegen

Zahlenwertgleichungen

In der Technik häufig:

– Werte in der vorgegebenen Einheit einsetzen

– Einheiten nicht umrechnen

Für TGLer ist dies an sich nicht ungewöhnlich, neu ist nur, dass man es darf :-)

– Einheit des Ergebnisses ist ebenfalls vorgegeben

Leitertafel

Nomogramme waren in der Zeit vor Taschenrechnern sehr beliebt.

Sensoren (Wdhg.)

Gewöhnung an tgtm-Aufgaben

tgtm HP 2013/14-1: Hängeförderer

Auflager, Trägerswahl (Wdhg.)

Wälzlager ermitteln (Wdhg.)

Tausendertrennzeichen

- In der Originalaufgabe wurde die Schreibweise „20.000 h“ statt „20 000 h“ verwendet, die im Maschinenbau nicht üblich ist.
- Die Archivierung auf Mikrofilm mag kein Argument mehr sein, aber in Zeichnungen für den Weltmarkt werden auch US-Normen verwendet, die bei „Kommazahlen“ einen Punkt einsetzen. Dort bedeutet „20.000 mm“ eben nicht „20 m“, sondern „20 mm“ und diese Verwechslung riskiert man einfach nicht.
- Im Maschinenbau verwendet man die Schreibweise mit Leerstelle („20 000 h“ für „20000 h“) gemäß [Duden 2006] S.100: „Ganze Zahlen aus mehr als drei Ziffern können von der Endziffer aus durch Zwischenräume in dreistellige Gruppen gegliedert werden.“ Alternativ erlaubt Duden einen Hochpunkt, aber dafür gibt es noch kein Sonderzeichen.

Projektionsmethoden (Wdhg.)

Getriebeberechnungen (Wdhg.)

Gewöhnung an tgtm-Aufgaben

– Wahllose Nummerierungen, Bezeichnungen usw. sind vorhersehbare Fallstricke bei jeder Form der Arbeit:

– Wer die Wahl hat und systematisch vorgeht, reduziert seine Fehlerquote, auch im Berufsleben.

– Wer keine Wahl hat, sollte eine alte Schülerregel beherzigen:

– Wer Aufgaben sorgfältig liest, hat Vorteile...

Fest- und Loslager

Punkt- und Umfangslast

Lagerung einzeichnen

Wer nichts auf's Blatt bringt, bekommt keine Punkte!

→ Jede Lösung ist besser als keine!!

1) Aufg. 1: Diagramme sind dankbare Aufgaben.

- HP 2011/12-1 Fördereinrichtung: „Stellen Sie die Energiewandlungskette mittels Blockschaltbild dar und berechnen Sie den Gesamtwirkungsgrad.“
- HP 2009/10-1 Lastenlift: „Zeichnen Sie den Energiefluss für das System ...“ schlägt als Lösung ein Energieflussdiagramm vor, aber m.E. kann es auch ein Blockschaltbild sein.

2) Aufg. 2 und 3

3) Aufg. 4

Formeln und Tabellen „Technik und Management“

4) Lösen Sie das Problem mit „Formeln und Tabellen.“

Die Problemlösung findet man „rückwärts“:

- Die Wälzlager tabellen enthalten Maße und C bzw. C_0
- C ist in der Gleichung und Leitertafel für nominelle Lebensdauer enthalten. Dazu braucht man weitere Werte
 - n und L_{10h} sind gegeben
 - (klein) p siehe Parameterliste
 - (groß) P siehe äquivalente Belastung P
- Radialkraft F_r ist gegeben; mit $x=1$
- Axialkraft F_a ist nicht gegeben, kann man als 0 annehmen; oder: $y=0$

5) Aufg. 5.1

6) Aufg. 5 und 6

- „Ermitteln Sie einen Lösungsansatz zur Bestimmung der maximal erfassbaren Drehzahl“ typisch tgtm-Sprech, reicht wohl nicht: Lesen muss man's, aber allzu wörtlich sollte man's nicht nehmen, denn nicht jedem Korrektor genügt der „Lösungsansatz“ ohne Ergebnis.
- „Bestimmen Sie ...“ Einfache Konstruktionen sind weniger fehleranfällig :-)

1) Aufg. 1, 2.1, 2.2

- 1.1 „Schneiden Sie xy frei“ ist eine typische tgtm-Aufgabe. Das Anspruchsvollste wird vorgegeben, ... aber deswegen werden die Notenschnitte nicht besser ... :-).
- 1.2 Träger auswählen ohne Biegemoment berechnen zu müssen und das für 4,0 Punkte, sollte man annehmen!
- 1.2 „Stellen Sie Ihre Lösung normgerecht dar.“ Natürlich muss eine Lösung normgerechte Einheiten usw. verwenden, aber hier ist das *gewählte Profil* gemeint..
- 2.1 „Zeichnen Sie ...“: Natürlich genügt eine Skizze.
- 2.2 „Entwickeln Sie einen Lösungsansatz zur Ermittlung ...“ Ermitteln Sie diese.“ statt simpel „Ermitteln Sie ...“ ist typisch tgtm-Sprech. Übrigens: Wenn der Nachsatz „Ermitteln Sie diese.“ fehlt, muss man es trotzdem tun.

2) Aufg. 2.3

3) Aufg. 2.3

- In BWL ist die Verwechslungsgefahr vermutlich nicht gegeben, weil Währungen fast immer 2 Nachkommastellen haben, die man kaum mit den 3 Stellen eines Tausenderblocks verwechseln kann.
- Man könnte noch die Frage stellen wie sich die Beziehung zu Normen und Amerikanern zwischen BWLern und Maschinenbauern unterscheiden :-)
- In Abi-Prüfungen erlebe ich regelmäßig, dass SuS den Punkt statt Komma falsch interpretieren. Das ist insofern unkritisch, weil ich dies nicht als Fehler werte. Ein Problem wird es aber, wenn SuS das falsche Ergebnis bewerten müssen, und sei es nur in einer Plausibilitätskontrolle: Ein Ergebnis, das um den Faktor 1000 zu klein ist...

4) Aufg. 3

- Die Angaben „Vorderansicht“ und „Draufsicht“ in der Skizze des Antriebs sollte man als einmaliges freundliches Entgegenkommen werten und nicht als Aufforderung, die Projektionsmethoden nicht zu kennen.

5) Aufg. 3.1 und 3.2

6) Aufg. 3.3

- Normalerweise nummeriert man die Größen in Reihenfolge des Kraftflusses, also müssten die Riemenscheiben d_1 und d_2 sein. Hier wurde aber d_2 für den Seiltrommel d_2 verwendet, der in der Zeichnung auch noch knapp neben der 2ten Riemenscheibe liegt. → da sind Fehler vorhersehbar („forced error“).

In tgtm-Aufgaben muss man mit Allem rechnen :-)

7) Aufg. 3.4

- In Aufg. 2.1 bekommt man 3P für die Lageskizze einer vorgegebenen Baugruppe vorgegeben, und hier soll man einen Lagersitz konstruieren und zeichnen für 5P. → In tgtm kann man aus der Punktzahl nicht immer auf Umfang und Schwierigkeit einer Aufgabe schließen.

Immerhin: Im offiziellen Lösungsvorschlag wurde auf die Problematik Punkt- und Umfangslast nicht eingegangen. Da ich von meinen SuS im Abi nie mehr verlange als ein oLV, habe ich keine Abzüge gemacht. In meiner Klassenarbeit sähe das anders aus.

ME_TA_tgtm.odt



tgtm HP 2012/13-1: Hebevorrichtung

Statik I extrem

Wälzlager ermitteln (Wdhg.)

Scherfestigkeit

Auflagerkräfte, M_{bmax} ermitteln

unklare Zeichnung

Prinzipskizze

Getriebeberechnung (Wdhg.)

Zähnezahlen für mehrstufiges Getriebe

1) *Aufg. 1.1*

- Tatsächlich haben SuS mit dieser einfachen Aufgabe überraschend viele Probleme.
- „...berechnen Sie ..“: Ich würde bei einer grafischen Lösung nicht viele Abzüge machen

2) *Aufg. 1.2*

- Dimensionieren = Baugröße festlegen. Wichtig, weil häufig.

3) *Aufg. 1.3*

4) *Aufg. 2.1 und 2.2*

- „Dokumentieren Sie den Lösungsweg..“ ist in schriftlichen Prüfungen reine Floskel.

5) *Aufg. 2.3*

6) *Aufg. 3.1*

7) *Aufg. 3*

8) *Aufg. 3.3: Zum Selberdenken*

tgtm HP 2007/08-3: Rollenhalterung

Extrem-Konstruktion

Schraubenfestigkeit

Schraubenlänge und Bohrungstiefe

Alternative Befestigungskonstruktionen

Wälzlager

Lagerung zeichnen mit Stückliste

1) *Aufg. 1*

ME_TA_tgtm.odt
Register 9

Formelsammlung

Register 9

Abi-Aufgaben tgtm

Register 10
Seitenumbruch



Sonstiges: Statik

Verkürzte Einführung in die Statik (Kräfte zusammensetzen)

MVK: ca. 90' Zeitbedarf
FTM, TG: entfällt

Graphostatik wurde um 1860 von Karl Culmann an der ETH Zürich entwickelt (Buch 1866).
([Ferguson 1992] S.147). Culmann war Pfälzer, hat die Graphostatik entwickelt oder aus den USA mitgebracht und weiterentwickelt.

Wdhg: Trägheitsprinzip : ohne F kein a

Aktionsprinzip : $F = m \cdot a$

Reaktionsprinzip

Darstellung mehrerer Kräfte

- Wie wirken Kräfte, die nicht genau mit- oder gegeneinander wirken ?
Versuch: 2 Schüler ziehen einen 3. Schüler mit je „20 kg“ in verschiedenen Richtungen (180° gegeneinander, 0° miteinander, 90°).
- Welche Kräfte muss der 3. Schüler aufbringen ?
- Wdh.: Kräfte hängen von Größe und Richtung ab. Wie könnte man Kräfte zeichnen ? → als Pfeile
- Wie kann man Größe und Richtung einer Kraft aus einem Pfeil ablesen ?
→ aus Länge und Richtung

Möglichkeiten zur Einführung

- Wdh.: Kreidekästchen auf dem Tisch fällt trotz Erdbeschleunigung nicht.
Auto bei konstant 100km/h beschleunigt trotz Antriebskraft nicht. → Kräfte treten immer paarweise auf, Kraft und Gegenkraft heben sich auf
- Zwei Kräfte können sich aufheben, wenn sie entgegengesetzt wirken. Wie wirken Kräfte in derselben Richtung, z.B. hintereinander fahrende Lokomotiven → Kräfte addieren sich

7) Erarbeiten anhand AB oder [EuroRBM] "Kräfte"

AB Kräfte ermitteln

- Gleichgerichtete Kräfte zeichnerisch und rechnerisch addieren
- Gegengerichtete Kräfte zeichnerisch und rechnerisch addieren
- Nicht parallele Kräfte zeichnerisch addieren (rechnerisch später!)
- Kräfte zeichnerisch und rechnerisch zerlegen
- Aufgabe 3 rechnerisch zerlegen und addieren

Allgemeines

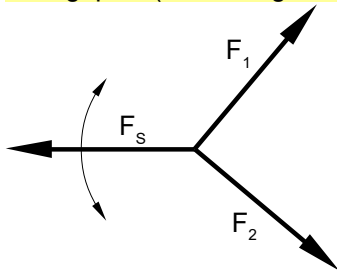
Mehrere Kräfte $F_1, F_2 \dots$ lassen sich zu einer „resultierenden“ Kraft F_R zusammensetzen.

F_R hängt von Größe und Richtung der Kräfte ab.

Kräfte können nicht einfach addiert werden, weil auch ihre Richtung eine Rolle spielt.

Vorgehensweise beim Zusammensetzen

1. Lageplan (Freileitungsmast)



LP = Welche Kräfte wirken überhaupt ?

Dort eintragen, wo sie wirken.

In der wirklichen Richtung

Zeichnerische Darstellung von Kräften

Kräfte werden als Pfeile gezeichnet

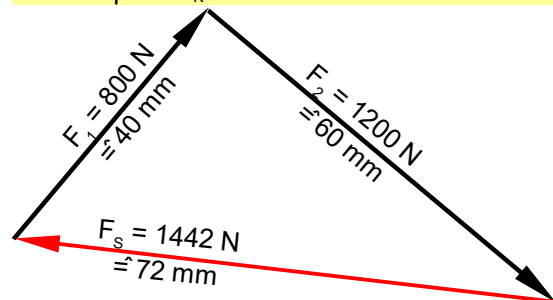
– Richtung auf dem Blatt = wirkliche Richtung

– Größe der Kraft [N] \approx Länge [mm]

z.B. 200 N Kraft \approx 10mm Länge

Freileitungsmast [EuroRBM] "Kräfte"

2. Kräfteplan M_K : 1200 N \approx 60 mm



KP = Kräfte berechnen

Hintereinander als Pfeilkette zeichnen.

Vertiefung

AB Übungen zum zentralen Kräftesystem

[EuroRBM] „Kräfte“ Aufgabe 1 bis 4: Zusammensetzen

[EuroRBM] „Kräfte“ Aufgabe 5 bis 6: Zerlegen

[EuroRBM] Aufgaben 7 ff

Keilspanner → Keilwirkung, Wahl des Bauteiles vereinfacht die Aufgabe

Schwenkran → LP auf einen Punkt konzentrieren (fehlt im RB, ergänzen)

[Böge Aufg.] "zentrales Kräftesystem"

Statik_TA_Einfuehrung-kurz.odt

Seitenumbruch



3-Kräfteverfahren

Anwendung:

3 nicht parallele Kräfte

Gesucht: 1x WL und 2x Betrag.

1 bekannte Kraft

+ 1 (un-)bekannte Kraft mit WL

+ 1 unbekannte Kraft ohne WL

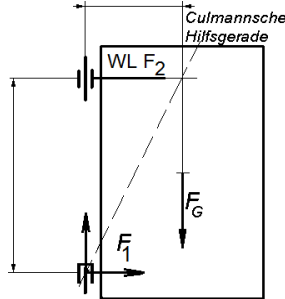
Arbeitsplan

0. Lageplanskizze

siehe Lageplan, im Lageplan kann man Schranie und Türe weglassen

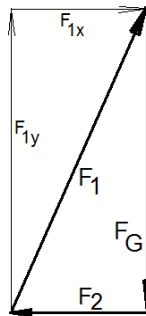
1. Lageplan

Türe $M_L = 10\text{cm}/2\text{m}$



2. Kräfteplan

$M_K = F_G / 10\text{cm}$



nur TGT

1) Welche Kräfte wirken auf die Scharniere der Klassenzimmertür

Schüler sollen die Kräfte in den Scharnieren einer Tür bestimmen. Maße schätzen oder mit Tafellineal messen.

2) Freimachen der Türe (Lageplan)

3) Der Lagemaßstab bringt die Abstände zwischen den Kräften in die Lösung

4) Kräfteplan

5) Anschließend Überschriften einsetzen.

Welche Kräfte wirken überhaupt ?

Das Türblatt muss seine Gewichtskraft auf eines (I) der beiden Scharniere (oben oder unten) senkrecht abstützen. Hier wurde das untere Scharnier gewählt, mit dem oberen funktioniert es sinngemäß. Die Kraft F_1 , mit der das untere Scharnier auf die Tür wirkt, ist in Betrag und Richtung zunächst unbekannt, dies wird im LP mit der Darstellung ihrer Komponenten F_{1x} und F_{1y} angedeutet. Wie alle Kräfte in der Statik darf man auch die beiden anderen Kräfte F_2 und F_G auf ihren Wirklinien verschieben bis zu deren Schnittpunkt und dort durch ihre Resultierende F_R ersetzen. Die Resultierende F_R und F_1 müssen sich aufheben (actio = reactio), weil sonst das Türblatt nicht im Gleichgewicht ist. Aufheben können sich die Resultierende und F_1 aber nur, wenn sie auf einer gemeinsamen Wirklinie liegen. Folglich bildet die Linie zwischen dem unteren Scharnier und dem Schnittpunkt aus F_G und F_2 die Wirklinie von F_1 . Damit schneiden sich alle 3 Kräfte in einem Punkt und die Aufgabe kann mit den Mitteln der zentralen Statik gelöst werden.

Schnittpunkt im LP = geschlossenes Polygon im KP

Lösungsgedanke

Karl Culmann (*1821 - †1881) war Bauingenieur, Professor an der ETH Zürich und Verfasser von „Die graphische Statik“ (→ [Culmann 1866]).

Übungen

4-Kräfteverfahren

Anwendung:

4 Kräfte, alle WL bekannt, max. paarweise parallel

1 bekannte Kräfte

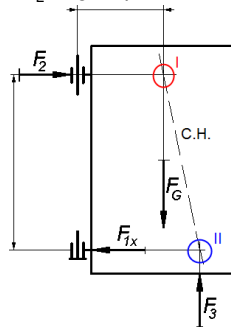
+ 3 (un-)bekannte Kräfte mit WL

Gesucht: 3x Betrag der Kraft

Arbeitsplan

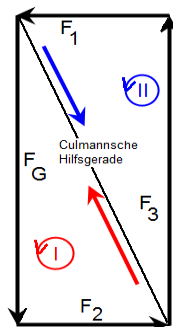
1. Lageplan

Türe $M_L = 10\text{cm}/2\text{m}$



2. Kräfteplan

$M_K = F_G / 10\text{cm}$



Die farbige Markierungen dienen der Erklärung und sind zur Lösung nicht erforderlich, auch nicht in s/w.

AB Statik_Ub_Abi:

1.1 HP94/95-2 Bohrmaschinenständer 1.1, 2.1 HP93/94-2 Zweigelenkarm, 3.1 HP95/96-1 Garagentransporter, 5.2 HP91/92-1 Parklift, 6.2 HP98/99-1 Lkw, [Böge Aufg.] Aufgaben 83ff "3-Kräfte-Verfahren"

AM Keil

1) Neue Situation: Die Türe wird mit einem Keil angehoben, bis die Angeln vom Gewicht der Türe entlastet sind.

Anwendung:

F_1 : Betrag und Richtung bekannt

F_2, F_3, F_4 : Betrag unbekannt, Richtung bekannt

2) 0. Lageplanskizze wird nicht mehr gesondert erwähnt

3) Keil außerhalb des Schwerpunktes ansetzen und vom Lageplan im 3-Kräfteverfahren ausgehen: die Schüler müssen selbst merken, dass die waagerechten Kräfte die Richtung tauschen.

Lösungsgedanke

Bei 4 Kräften, davon 3 Unbekannten, werden zwei Kräftepaare zusammengefasst und jeweils durch ihr F_R ersetzt. Damit dies momentenfrei gelingt, muss die Wirklinie jeder F_R durch den Schnittpunkt ihres Kräftepaars verlaufen. Damit sich die beiden F_R aufheben können, müssen sie eine gemeinsame Wirklinie haben, also auch die beiden Schnittpunkte der beiden Kräftepaare verlaufen (Culmannsche² Hilfsgerade C.H.).

Man kann die Culmannsche Hilfsgerade als ein internes Kräftepaar (KP: roter und blauer Pfeil, actio und reactio) betrachten, das in den Schnittpunkten I und II (rot und blau) hilft, das Gleichgewicht zu halten, sich aber wie jedes interne Kräftepaar selbst aufhebt. Da C.H. bei der Türe eine Druckkraft ist, können könnte man die Tür rechtwinklig zur C.H. durchsägen (Vergleiche [EuroRBM] Aufgabe "Keilspanner").

Hinweise zur Konstruktion

Man beginnt mit dem Schnittpunkt 1 (roter Kreis), weil dort die bekannte Kraft (FG) liegt, und zerlegt im KP die Kraft FG in die Kraft F2 und die gedachte Kraft C.H. mithilfe ihrer Wirklinien. Es ergibt sich das Kräftepaar links unten (roter Kreis).

Jetzt kennt man auch im Schnittpunkt II (blauer Kreis) eine Kraft, nämlich die gedachte Kraft C.H., die man in die Kräfte F1 und F3 zerlegt.

Genau gedacht ist C.H. ein internes Kräftepaar, das in einem Schnittpunkt entgegengesetzt zum anderen wirkt (roter und blauer Pfeil). Man erkennt, dass dadurch im KP für jeden Schnittpunkt ein geschlossenes Kräftepaar entsteht und sich gleichzeitig das gedachte interne Kräftepaar C.H. wieder aufhebt, wie es sich für ein bloßes Hilfsmittel zur Konstruktion des Kräfteplanes gehört.

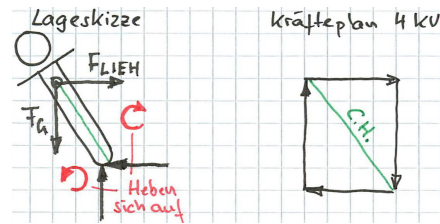


Übungen

[AB Statik_Ub_Abi:](#)

7.1 HP1998/99-2 Zugmaschine mit Anhänger, 5.1 HP1991/92-1 Parklift (Bremskraft und Aufstandskraft getrennt betrachten), 9.1 HP1992/93-1 Mountainbike (Gewichtskraft des Rades vernachlässigen), HP 1986/87-2 Stirnkipper. Hinweis: 4-Kräfte-Aufgaben sind selten!
[Böge Aufg.] Aufgaben 117ff "4-Kräfte-Verfahren"

Statik_TA_34-Kraefte-Verfahren.odt





Schlusslinienverfahren (Auflager zeichnerisch ermitteln)

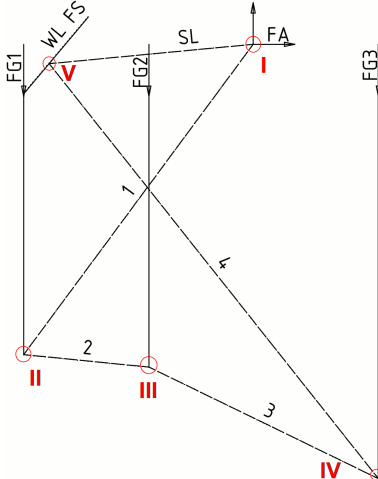
TG: nicht mehr; FTM, MVK: nein
Ausführliche Darstellung siehe folgende Seiten.

Anwendung

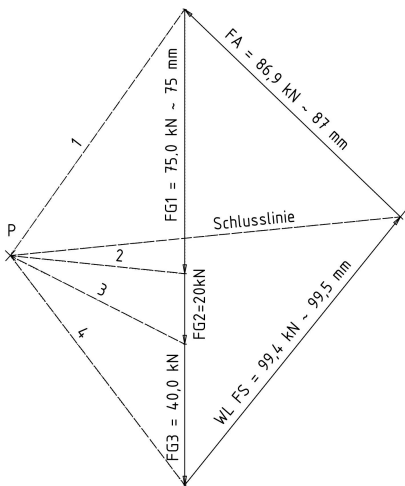
Gegeben: Beliebige Anzahl auch paralleler Kräfte
Gesucht: 1x Kraft (Betrag + WL)
+ 1x Betrag (WL bekannt)

Beispiel: HP 97/98-1 Verladeanlage

Lageplan Brücke $M_L = 1\text{m} / 10\text{mm}$



Kräfteplan $M_K = 10\text{ kN} / 10\text{ mm}$



Arbeitsplan

1. Lageplan
2. Kräfteplan
– bekannte Kräfte addieren
3. KP: Anschluss der unbekannten Kräfte festlegen
4. KP: Pol P wählen
– Polstrahlen möglichst rechtwinklig zu den Kräften
5. KP: Polstrahlen einzeichnen und fortlaufend nummerieren
– beginnend im zweiwertigen Lager

6. LP: Seilstrahlen übertragen

- Korrespondierend zu Polstrahlen
- parallel
 - zwischen die gleichen Kräfte
 - fortlaufend
 - gleiche Nummerierung

7. LP: Schlusslinie eintragen

SL schließt die Seilstrahlen

8. KP: Schlusslinie übertragen

Schnittpunkt SL / bekannte WL ist der letzte gesuchte Kraftknoten im KP

9. KP vervollständigen

Zuvor Lageplanskizze, dann Lageplan mit Wirklinien der gegebenen Kräfte zeichnen.

Es empfiehlt sich, die Kräfte im Kräfteplan in einer Reihenfolge zu zeichnen, die dem Lageplan entspricht (z.B. Kräfte im LP von links nach rechts). Dies verringert kreuzende Seilstrahlen.

Bisher alles wie gehabt.

Die Kraft F_A kann oben im KP anschließen und F_S unten oder umgekehrt, aber damit es später nicht zu Verwechslungen kommt, ist es wichtig, sich festzulegen und dies auch im KP einzutragen. Danach trägt man auch die WL von F_S ein.

Die Polstrahlen sollen möglichst rechtwinklig zu den Kräften stehen, da sonst die Seilstrahlen wegen der spitzen Winkel leicht außer Kontrolle geraten und das Blatt verlassen. In diesem Fall ist es die zweckmäßigste Lösung, weitere Blätter anzukleben. Andere Lösungen kosten mehr Zeit. Man kann auch die Maßstäbe klein wählen, aber das verringert die Genauigkeit.

Beginn im zweiwertigen Lager (hier F_A), weil das Lager der einzige bekannte Punkt seiner Wirklinie ist. Beginnt man nicht in F_A , wird man es nicht mehr treffen. Wenn kein zweiwertiges Lager vorhanden ist, kann man beliebig beginnen.

Fortlaufend nummerieren richtet sich nach dem Verlauf der Kräfte, s.u. → "Bildergeschichte" Schritt 8. Eigentlich ist die Bezeichnung der Polstrahlen gleichgültig, aber wenn man sie durcheinander nummeriert, verliert man leicht den Überblick. Der Polstrahl zwischen F_A und F_S kann noch nicht eingezeichnet werden.

Parallelverschiebung!

Aus einem Polstrahl zwischen den Kräften A und B wird ein Seilstrahl zwischen den Wirklinien der Kräfte A und B. Aufeinanderfolgende Seilstrahlen kreuzen sich auf den Wirklinien der Kräfte, die von den entsprechenden Polstrahlen eingeschlossen sind. Alle Seilstrahlen müssen zusammen mit der Schlusslinie ein Polygon ergeben.

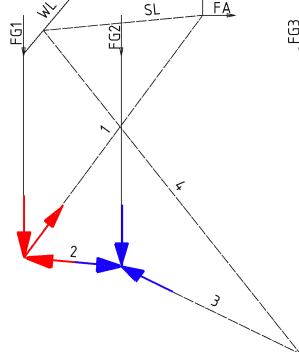
Schnittpunkte mit den WL zur besseren Übersichtlichkeit einzeichnen und mit römischen Ziffern nummerieren (hier nicht dargestellt), Seilstrahlen bekommen die Nummern ihrer korrespondierenden Polstrahlen.

Lösungsgedanke

Ist wie bei allen grafischen Verfahren:

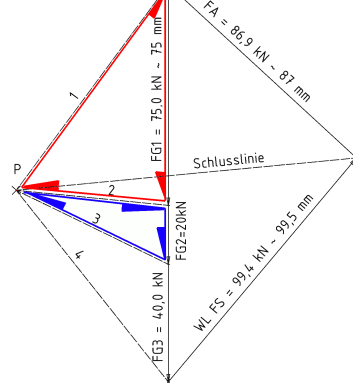
Kräfte, die im LP auf einen Punkt wirken, ergeben im KP ein geschlossenes Vieleck

LP:



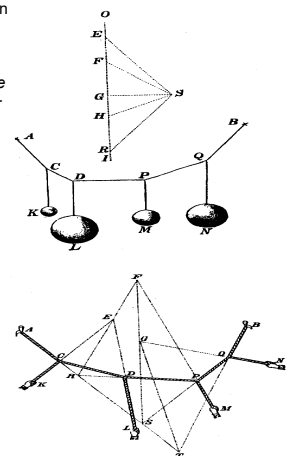
Seil-/Polstrahlen können als interne Kräfte interpretiert werden, die sich wieder aufheben. Kräfte, die im Lageplan auf einen Punkt wirken, ergeben im Kräfteplan ein Vieleck, wobei die Pol-/Seilstrahlen doppelt, aber entgegengesetzt wirken und sich dadurch aufheben (Beispiel Polstrahl 2 in rot und blau).

KP:



Seil- und Kräftepolygon nach Pierre Varignon (1654 - 1722) aus seinem Buch *Nouvelle Mécanique ou Statique* (1725). Solche Überlegungen wurden beim Bau von Brücken eingesetzt. Aus [Kurrer 2002]

FO Seilpolygon

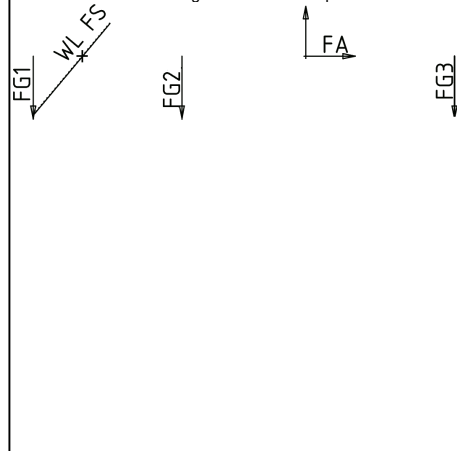




Schlusslinienverfahren in Bildern

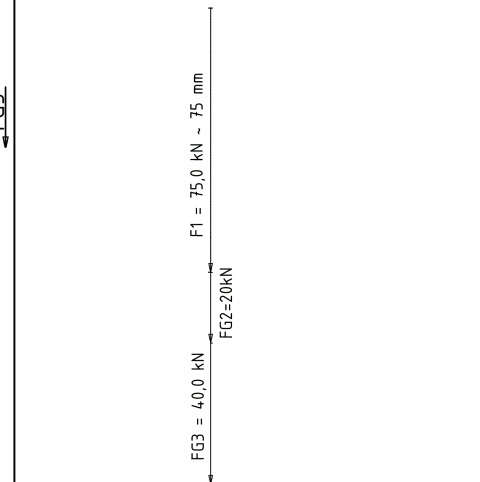
1) LP $M_k = 1 \text{ m} / 10 \text{ mm}$

Wie bei allen zeichnerischen Verfahren wird ein Lageplan erstellt. Die Abstände zwischen den Kraftangriffspunkten müssen (Lage-)maßstabsgetreu eingezeichnet werden, damit die Wirkung der Momente richtig in die Lösung einfließt. Wirklinien WL werden richtungstreu eingezeichnet. Zweiwertige Lager (F_A ohne Wirklinie) können mit einem Koordinatenkreuz gekennzeichnet werden. Die Länge der Kraftlinien spielt keine Rolle.

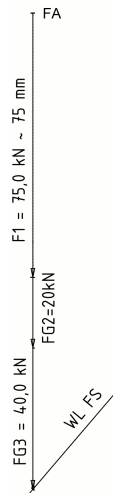


2) KP $M_k = 10 \text{ kN} / 10 \text{ mm}$

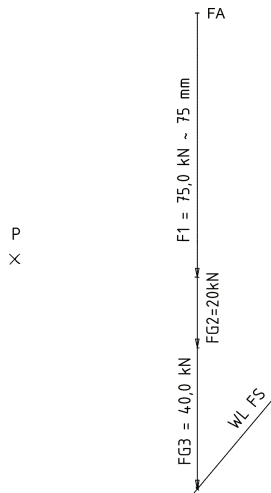
Wie bei allen zeichnerischen Verfahren werden im Kräfteplan zunächst die bekannten Kräfte maßstabstreu hintereinander gekettet. Die Reihenfolge ist beliebig, aber wenn man eine Reihenfolge von links nach rechts oder umgekehrt einhält, gibt es später weniger Durcheinander bei den Seilstrahlen (Schritt 15).



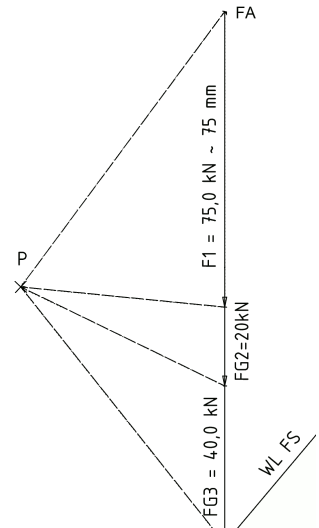
3) KP: Die Kraft F_A kann man oben oder unten an die vorhandene Kraftkette anschließen, aber man muss sich festlegen. Ebenso markiert man vorhandene Wirklinien unbekannter Kräfte und bezeichnet sie.



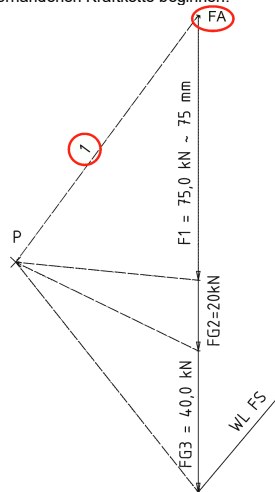
4) KP: Neben den KP zeichnet man ein beliebiges Pol P ein. Wenn der Pol P so liegt, dass die Polstrahlen möglichst rechtwinklig zu den Kräften verlaufen (Schritt 5), verringert man spätere Probleme mit dem Platzbedarf.



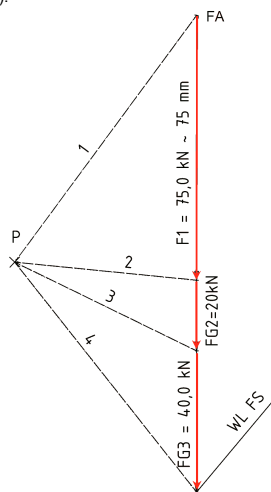
5) KP: Zwischen den Pol und die Verbindungsstellen von je 2 Kräften zeichnet man die Polstrahlen ein.



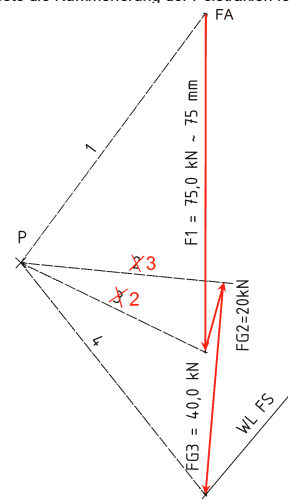
6) KP: Die Polstrahlen werden nummeriert, beginnend im zweiwertigen Lager (Festlager) (Begründung → Schritt 11). Wenn kein zweiwertiges Lager vorhanden ist, kann man an jedem Ende der vorhandenen Kraftkette beginnen.



7) KP: Die Polstrahlen werden fortlaufend nummeriert, wobei fortlaufend nicht einfach von oben nach unten bedeutet, sondern sich nach der Reihenfolge der Kräfte richtet (Beispiel siehe Schritt 8).

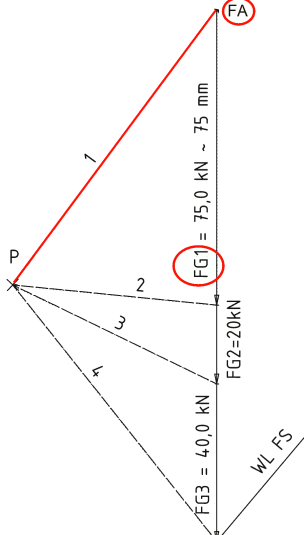


8) KP (Eingeschobenes Bild): Wenn die Kräfte hin und her verliefen, müsste die Nummerierung der Polstrahlen folgen.

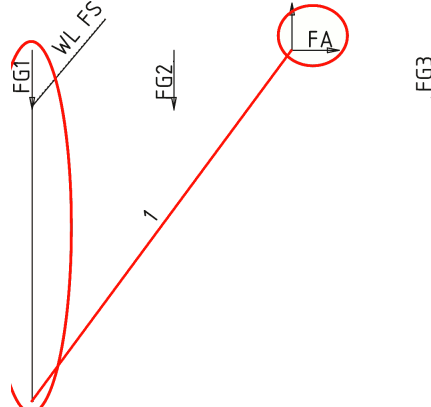




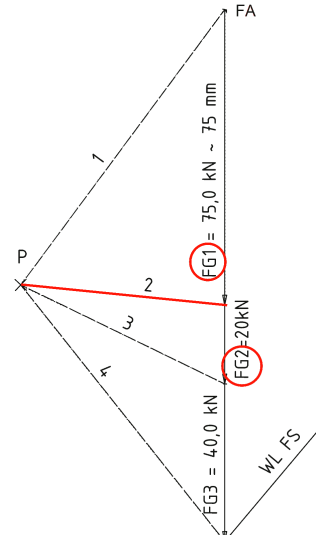
9) KP Polstrahl 1 bildet einen Schnittpunkt mit F_A und F_{G1}



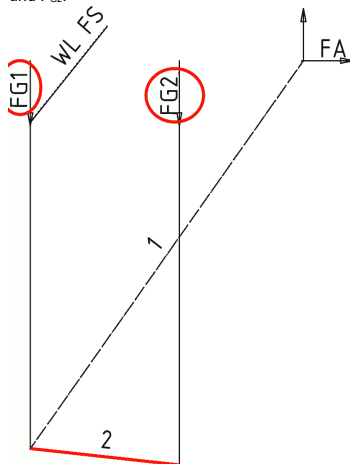
10) LP: Der Polstrahl 1 wird parallel verschoben in den Lageplan und bildet dort den Seilstrahl 1. Er verläuft zwischen den Wirklinien der gleichen Kräfte wie im Kräfteplan, in diesem Fall zwischen der Wirklinie von F_A und der Wirklinie von F_{G1} . Hier wird auch deutlich, warum man im zweiwertigen Lager A beginnen muss: Von der Wirklinie von F_A ist nur ein Punkt (im Lager A) bekannt, und wenn man nicht dort beginnt, wird man die Wirklinie von F_A später nicht mehr treffen.



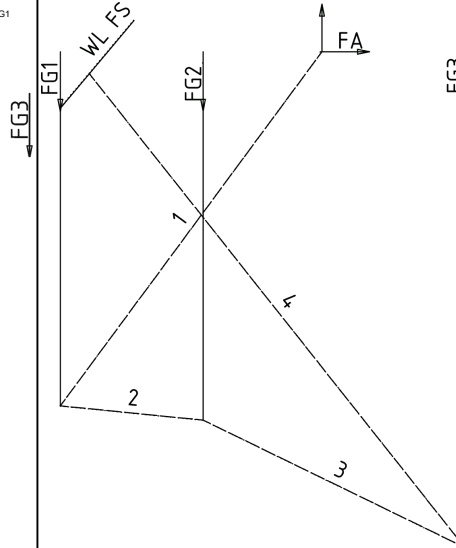
11) KP: Polstrahl 2 bildet einen Schnittpunkt mit F_{G1} und F_{G2}



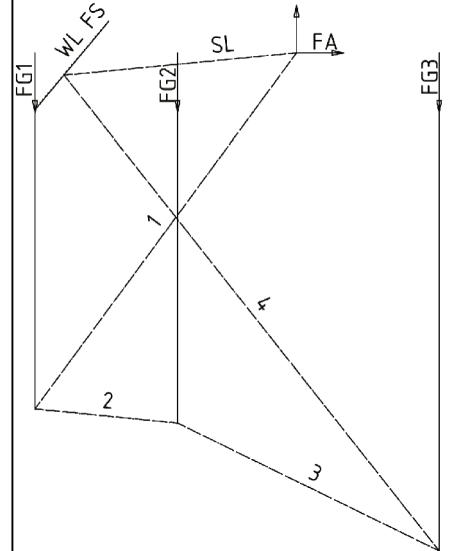
12) LP: Seilstrahl 2 schließt sich an Seilstrahl 1 an, verläuft parallel zum Polstrahl 2 und verbindet die Wirklinien von F_{G1} und F_{G2} .



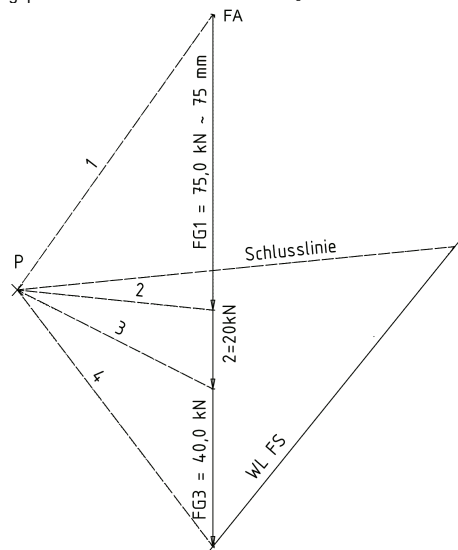
13) LP Seilstrahlen 3 und 4 ergänzt.



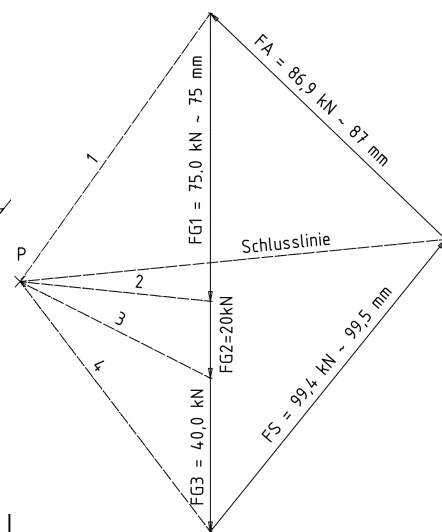
14) LP: Schlusslinie SL eintragen. Die Schlusslinie schließt den Kreis der Seilstrahlen.



15) KP: Schlusslinie aus dem LP übertragen. Die Schlusslinie im KP verläuft parallel zur Schlusslinie im Lageplan vom Pol P bis zur Wirklinie von F_S .



16) KP vervollständigen. Der Schnittpunkt zwischen der Schlusslinie und der bekannten Wirklinie F_S ist der letzte gesuchte Kraftknoten. Die Richtung der gesuchte Kräfte muss gleichsinnig mit den bekannten Kräften wirken.



Hinweise:
 Die Zeichnungen wurden mit einem CAD-Programm erstellt, von Hand ist die angegebene Genauigkeit nicht erreichbar. Aber mehr als 5% Abweichung sollten es bei diesem vergleichsweise einfachen Plan nicht sein. Wenn spitze Winkel und lange Linien ins Spiel kommen, kann es etwas mehr werden.



Statik – Festigkeitslehre – Getriebe – Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten Beträgen

Gewerbeschule Lörrach

https://ulrich-rapp.de/..Statik_TA__alle.odm
Unterrichtsplanungen für alle, 25.03.2019, S.35/54



Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten Beträgen lösbar bei 2 parallelen WL sind → Fz auf schiefer Ebene

Anwendung

Gegeben: Beliebige Anzahl auch paralleler Kräfte
3 WL (davon 2 parallel) ohne Beträge
Gesucht: 3x Beträge von Kräften

TG: nicht mehr; FTM, MVK: nein

Auch wenn es kein reinrassiges Schlusslinienverfahren ist, lässt sich dieser Aufgabentyp, der im Abi gelegentlich auftritt, zwanglos mit dem Schlusslinienverfahren lösen, solange zwei der gesuchten Kräfte parallel sind – und das waren sie bisher im Abi.

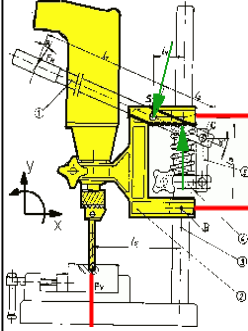
Wenn 3 Beträge gesucht sind, deren Wirklinien nicht parallel sind, ist das Schlusslinienverfahren nicht mehr geeignet. In diesem Fall kann man die bekannten Kräfte mit dem ähnlichen Seileckverfahren zu einer resultierenden Kraft zusammenfassen und diese dann mit dem Vier-Kräfte-Verfahren wieder zerlegen (siehe unten: "kombinierte Verfahren"). Aufgaben dieses Typs sind meines Wissen bisher noch nicht im Abi (TG Baden-Württemberg) vorgekommen, aber vom Lehrplan her kann man sie nicht ausschließen.

Typisch bei Fahrzeugen auf schiefer Ebene.

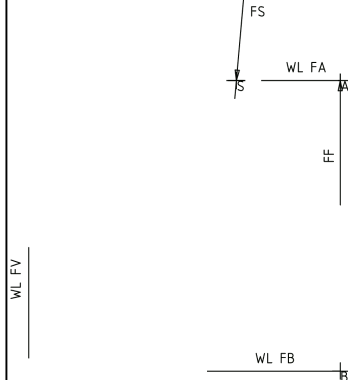
Beispiel: HP94/95-1 Bohrmaschine..

Besonderheiten bei 3 WL

0. Lageplanskizze



1. Lageplan, $M_L = 100N/20mm$



Lageplanskizze, (Lage-)maßstabsgetreuer Lageplan und der Kräfteplan bis zum Punkt "Alle bekannten Kräfte verkettet.." ist bei allen zeichnerischen Verfahren gleich.

Die roten Linien in der Lageplanskizze sollen die Wirklinien der gesuchten Kräfte darstellen. Eine Richtungsangabe ist für sie nicht erforderlich, das wäre in dem Fall auch ziemlich schwierig. Die Richtungen ergeben sich im Verlauf der Lösung.

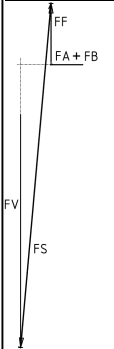
2a. Kräfteplan

linkes Bild

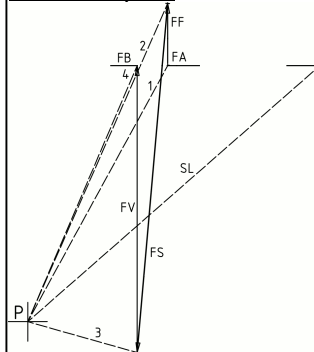
- F_F , F_V verkettet
- F_A und F_B auf eine WL legen
- Dadurch ist die Länge von F_V festgelegt

rechtes Bild

- F_V eintragen
- weiter wie üblich
- F_A und F_B zuordnen



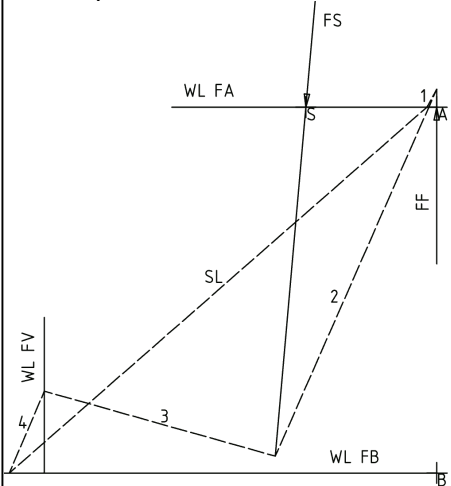
2b. Kräfteplan



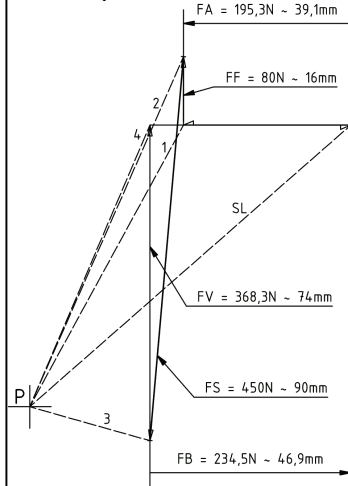
Nachdem man die bekannten Kräfte F_F und F_S verkettet hat, fasst man die parallelen Kräfte F_A und F_B auf einer Wirklinie zusammen und erkennt, dass es für F_V nur noch eine Möglichkeit gibt, nämlich bis zur Verlängerung der gemeinsamen Wirklinie von F_A und F_V .

Somit ist F_V bekannt und man kann wie üblich weiter machen. D.h. man legt fest, wo F_A und F_B am neuen Kräfteplan anschließen, zeichnet die Polstrahlen usw. Man beachte Nummerierung der Polstrahlen in der Reihenfolge der zugehörigen Kräfte. Die Schlusslinie zeigt dann an, wo F_B aufhört und F_A anfängt.

LP komplett



KP komplett



Im fertigen Kräfteplan verlaufen die Kräfte F_A und F_B teilweise auf der gleichen Linie. F_B wirkt nach rechts und F_A nach links, sodass der Kräftezug geschlossen ist.

Vertiefung

Ub Statik Abi 9.1) HP92/93-1 Mountainbike



Seileckverfahren

Anwendung

Bestimmung einer Resultierenden aus beliebigen Kräften

Gegeben: beliebig

Gesucht: 1x Kraft (Betrag + Richtung + Lage WL)

Prinzip

ähnlich wie Schlusslinienverfahren

gesucht wird eine (!) Kraft und die Lage ihrer Wirklinie

– alle Polstrahlen sind bekannt, deshalb gibt es keine Schlusslinie

– Betrag und Richtung der einzig fehlenden Kraft ergibt sich im Kräfteplan

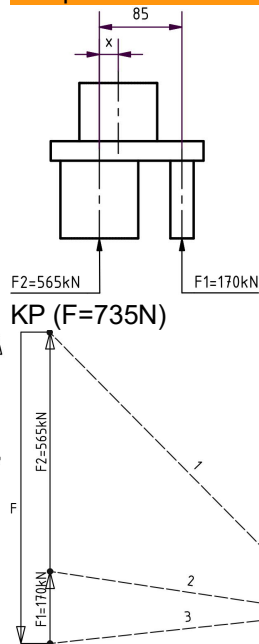
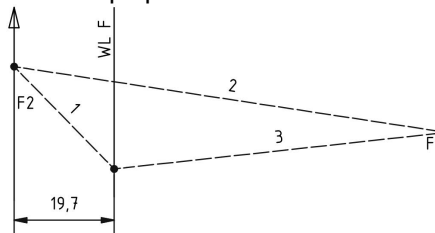
– Die Lage der WL der gesuchten Kraft ergibt sich im LP aus dem Schnittpunkt der letzten beiden Seilstrahlen

HP 85/86-2 Kurbelpresse Aufg.2

Die beiden Stempel unter der Stempelplatte werden mit den Kräften laut Zeichnung belastet.
Gesucht ist das Maß x , damit der obere Zapfen die beiden Kräfte ohne Biegemoment aufnehmen kann.

Beispiel

LP Stempelplatte



nur TG:

Ültg: Neu im Lehrplan, bisher nicht dran gekommen, sehr ähnlich zum SLV

Kombination aus SEV und 4KV

Alternativ: 2 Kräfte zu einem zweiwertigen Lager zusammenfassen

Anwendung

Wenn für das 4KV zu viele Kräfte mitspielen und das SLV mit 3 gesuchten Beträgen nicht greift, weil die WL der gesuchten Kräfte nicht parallel sind.

Beispiel: HP92/93-1 Mountainbike

(Änderung: Vorderrad auf einer waagerechten Ebene)

Ültg: Wie löst man das Beispiel (links unten) grafisch, wenn das Vorderrad schon auf einer waagerechten Ebene steht?

Trat bisher im Abi nicht auf, ist aber vom Lehrplan her nicht völlig auszuschließen.

FO erstellen

Arbeitsplan

Kräfte mit SEV zusammenfassen

Resultierende mit 4KV zerlegen

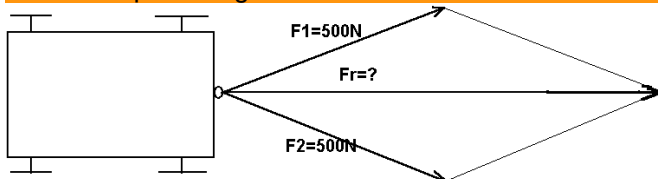
Vertiefung

NP 1998/99-2 Geländewagen Aufgabe 1 (Änderung: zusätzliche Masse im Fahrzeug, z.B. Ladung)

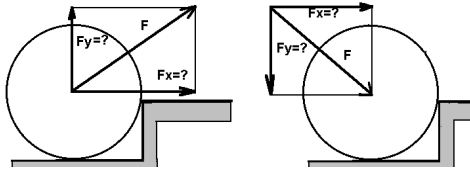


Grundoperationen der Statik

1. Kräfteparallelogramm



Die resultierende Kraft F_r zweier in einem Punkt angreifender Kräfte ist die Diagonale des aus beiden Kräften gebildeten Parallelogramms



2. Längsverschiebung



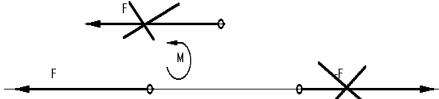
Kräfte können auf ihren Wirklinien frei verschoben werden.

3. Erweiterungssatz



Zwei gleich große, gegensinnige, auf gleicher Wirklinie liegende Kräfte können zu einem Kräftesystem hinzugefügt oder von ihm fortgenommen werden, ohne dass sich die Wirkung des Kräftesystems ändert.

4. Parallelverschiebung



Eine Kraft darf auf eine parallele Wirklinie verschoben werden, wenn ein Moment $M = \text{Kraft} \times \text{Verschiebarm}$ hinzugefügt wird (Versatzmoment).

(Kraft-)Moment einer Einzelkraft

ist das Produkt aus Kraft und Wirkabstand (rechtwinklig zur Kraft gemessen)

Definition

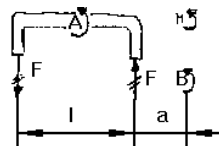
(+) = linksdrehend

(-) = rechtsdrehend

Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.

z.B. Fahrradlenker



$$A: M = F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l$$

$$B: M = F \cdot (l + a) - F \cdot a = F \cdot l$$

Das Drehmoment eines Kräftepaars ist an jedem Ort der Ebene gleich und kann deshalb beliebig in der Ebene verschoben werden.

MVK, FTM, TG: nicht unterrichten, nur beiläufig einbringen

Oben wurden schon einige „Rechenregeln“ für Kräfte eingesetzt. Welche weiteren sind bekannt?

Wie der folgende Verschiebesatz vom Meister selbst als Axiom eingeführt (Sir Isaac Newton 1643-1727) [4].

Analytische Berechnung:

- 1 Zerlegen der Kräfte in x- und y-Komponenten F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} und F_{2y}
- 2 addieren der Komponenten $F_{rx} = F_{1x} + F_{2x}$, F_{ry} analog

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}; \quad \alpha = \arctan \frac{F_{ry}}{F_{rx}}; \text{ Zählrichtung beachten}$$

Vektorielle Berechnung ist einfacher, da die Komponenten F_x und F_y explizit vorliegen:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{bmatrix}$$

Kräfte müssen, wie alle Vektoren, unter Berücksichtigung ihres Betrages, ihrer Wirklinie und ihrer Richtung addiert werden. Anwendung und Übung siehe unten
Resultierende Kraft ist diejenige gedachte Ersatzkraft, die dieselbe Wirkung auf einen Körper ausübt wie die Einzelkräfte F_1 , F_2 , ..., zusammen.

Zur Verdeutlichung der Kraftvektoren, ihrer Zerlegung und Zusammensetzung: Umgekehrt geht es auch, Anwendung später.

Auf der Ebene macht es ohne Reibung keinen Unterschied, ob man den Kinderwagen schiebt oder zieht. Am Randstein weiß jeder aus Erfahrung, dass Ziehen günstiger ist. Im Bild erkennt man, dass die aufwärts gerichtete Komponente F_x dem Wagen über den Randstein hilft. Tatsächlich ist auch auf der Ebene das Ziehen günstiger, weil es den Wagen entlastet und die Reibung vermindert. Trotzdem schiebt man Kinderwagen wegen des Blickkontaktes zum Kind und weil man sich abstützen kann.

In [Böge Technologie] und im LPE sind der Verschiebe- und der Erweiterungssatz in der Reihenfolge vertauscht.

AM Metallstab, Gummiband schieben und ziehen

Erkenntnis: für starre Körper ist es belanglos, ob eine Kraft „vorne“ oder „hinten“ einfließt (z.B. Heck- oder Frontantrieb). Bei nicht starren Körpern ergeben sich Änderungen (z.B. Kräftegriff in Gewinden, Gummiband unter dem Einfluss von Druckkraft und Reibung). Andere Veränderungen wie Stabilität sind nicht Thema der Statik, siehe Definition.

Folgt aus den Axiomen Parallelogramm und Längsverschiebung.

Welches F_r haben diese beiden betragsmäßig gleich großen Kräfte?

$F_r = 0$, deshalb kann es in jedes System eingesetzt werden.

„Auf gleicher Wirklinie“ folgt aus dem Längsverschiebungssatz.

Folgt aus den vorigen Axiomen und der Momentengleichung.

Vorgehensweise:

1 Kraft F oben eintragen

2 Kraft F und $-F$ unten eintragen (Erweiterungssatz)

3 Moment einsetzen, ursprüngliche Kraft F und $-F$ streichen.

Wird die Kraft auf ihrer Wirklinie ersetzt, entsteht kein Moment (Längsverschiebesatz).

Das Versatzmoment wirkt an jeder Stelle des Körpers

siehe oben, Kräftepaar am Beispiel Fahrradlenker.

Ültg: Tisch seitlich schieben: welche Wirkung von Kräften muss man auch in der Statik berücksichtigen?

Betrag und Richtung eines Momentes hängt von der Kraft und dem Bezugspunkt ab.

Einheit Newtonmeter [Nm], nicht zu verwechseln mit Joule $J = \text{Nm}$: beim Drehmoment stehen Kraft und Weg rechtwinklig, bei der Arbeit parallel zueinander.

Die Richtung der Drehachse steht senkrecht auf der von Kraft und Hebelarm aufgespannten Ebene. In unserem Fall ist sie die z-Achse und kommt aus der Ebene heraus. Es gilt die

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.

Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit o.ä. im Spiel.

Einzelkräfte bewirken keine Drehung. Ohne Reibung, Lager o.ä. würden sie nur eine Verschiebung bewirken.

Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

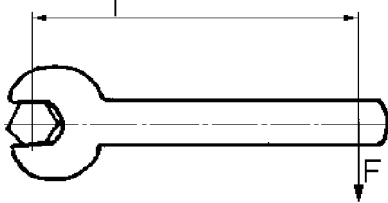
Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch jedes andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Ein Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, wenn beide das gleiche Drehmoment haben, z.B. doppelter Betrag und halber Abstand; gleiche Kräfte in anderer Ausrichtung.



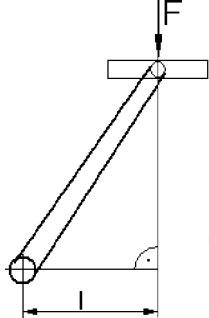
Drehmoment, Hebel

z.B. Schraubenschlüssel



(Dreh-)Moment $M = F \times l$ [in Nm]
Kraft x Hebelarm

z.B. Fahrradpedal

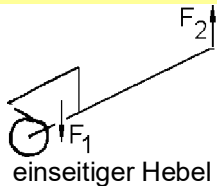


Hebelarm senkrecht zur Kraftlinie
oder
Der Hebelarm ist der kürzeste Abstand zwischen Drehpunkt und Kraftlinie

Gleichgewichtsbedingungen

bei mehreren Momenten

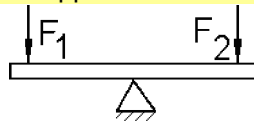
z.B. Schubkarre



einseitiger Hebel

$\Sigma M = 0$ (Summe aller Momente)
 $\Sigma F = 0$ (Summe aller Kräfte)

z.B. Wippe



zweiseitiger Hebel

oder $\Sigma M_{li} = \Sigma M_{re}$
Summe der links drehenden Momente = Summe der rechts drehenden Momente

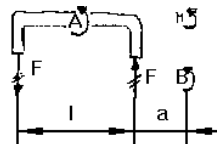
Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.

z.B. Fahrradlenker

$$A: M = F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l$$

$$B: M = F \cdot (l + a) - F \cdot a = F \cdot l$$



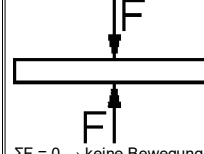
Vertiefung

FTM, MVK: ca. 90' Zeitbedarf (ca. 45' ohne Übungen)

TC: entfällt

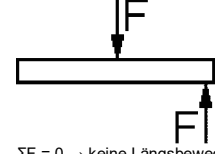
1) Ein: Bleistift o.ä. auf dem OH-Projektor anschieben

2) Kräfte fluchten



$\Sigma F = 0 \rightarrow$ keine Bewegung

3) Kräfte fluchten nicht



$\Sigma F = 0 \rightarrow$ keine Längsbewegung aber Drehbewegung

4) Wie erfasst man „Drehkräfte“ ?

Merke: Einheit Nm = J gilt auch für die Arbeit und darf dennoch nicht verwechselt werden

$$W = F \times s$$

$$M = F \times l$$

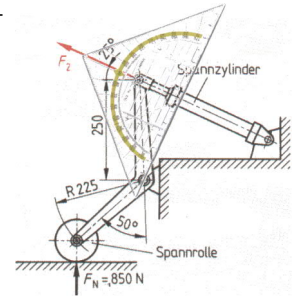
$$F \parallel s$$

$$F \perp l$$

parallel

rechtwinklig

Der Hebelarm kann mit dem Geodreieck ermittelt werden: Kraft auf die 90°-Linie, Hypotenuse durch den Drehpunkt, Hebelarm an der Skale ablesen:
Quelle des Bilduntergrundes: [EuroRBM]



1) Wie Verhältnisse, wenn mehrere Momente auftreten

Erinnere: Gleichgewichtsbedingung bei Kräften

\rightarrow Gleichgewichtsbedingung bei Drehmomenten

Zwar mit $\Sigma F = 0$ beginnen, dies zunächst eine Zeile frei lassen und dann $\Sigma M = 0$ darüber schreiben, weil man bei der Berechnung damit anfangen sollte.

gebogene Pfeile ergänzen

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.

Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit oä. im Spiel.

1. Einzelkräfte gibt es nicht und 2. sie würden sie keine Drehung bewirken. Ohne Reibung, Lager, Trägheit o.ä. gäbe es nur eine Verschiebung.

Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

Für das Moment am Lenker spielt es keine Rolle, ob man es im Punkt A oder im Punkt B berechnet: Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch jedes andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Am Faden aufgehängtes Lineal einführen

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 1..8

MVK: [EuroRBM]



Reibung

Ein Körper, der andere berührt, setzt einer Bewegung einen Widerstand entgegen.

→ Reibungskraft bzw. Reibungswiderstand F_R

Einflüsse auf die Reibung haben

Normalkraft

Werkstoffpaarung

Oberflächengüte

Schmierzustand

Reibungsart

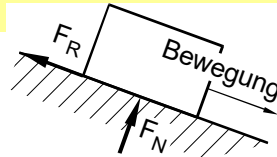
Haft-, Gleit-, Roll-, Wälzreibung

} zusammengefasst in
Reibungszahl μ oder f

Berechnung

Haft- und Gleitreibung

$$F_R = \mu \cdot F_N$$



– F_N = Kraft senkrecht zur Trennfläche

μ = Reibungskoeffizient für die Werkstoffpaarung

μ_H : Haftreibung (= Höchstwert !)

μ_G : Gleitreibung

$\mu_H > \mu_G$

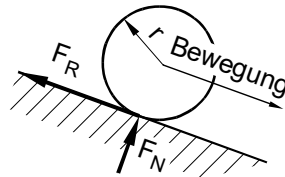
Reibwerte sind keine tatsächlichen Werte, sondern mögliche Höchstwerte

Rollreibung

$$F_R = \frac{f \cdot F_N}{r}$$

f = Rollreibungskoeffizient

r = Radius



Gleit- oder Wälzlager

Reibmoment wird wie bei Gleitreibung berechnet

$$M_R = \mu \cdot F_N \cdot r$$

$$M_R = \mu \cdot F_N \cdot \frac{d}{2}$$

μ (Gleitlager) hängt ab von Werkstoffpaarung

μ (Wälzlager) $\mu = 0,001 \dots 0,003$

Übung

Zusatzfragen

1) [EuroRBM] 27 S.110 Aufg. 3) Welchen Zweck haben die zusätzlichen Scheiben bei Mehrscheibenkupplungen? (zusätzliche Fläche erhöht die Reibkraft nicht?!)?

Mehrscheibenkupplungen erhöhen das Reibmoment, weil jede Berührfläche Belag - Scheibe die volle Normalkraft überträgt, während die Vergrößerung der Fläche eines Belages bei konstanter Normalkraft die Flächenpressung senkt.

Mehrere Bremsbeläge in Reihe bewirken, dass die Normalkraft höher angehoben wird.

Veranschaulichung: Welches Gewicht zeigen zwei Personenwaagen an, wenn man

– sie nebeneinander stellt und mit je einem Bein draufsteht?

– sie aufeinander legt und dann drauf steht?

MVK, TG: entfällt; FTM: prüfen

FO Asterix, Pyramidenbau, Steine ziehen

1) Ein: Was macht den Arbeitern, außer der Peitsche, die Arbeit schwer?

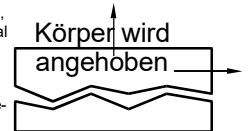
2) Tatsächlich betrachten wir nur die Festkörperreibung.

3) Welche Größen haben Einfluss auf die (Festkörper-)Reibung, bzw. wie könnte man den Arbeitern das Leben erleichtern?

Normalkraft ist die Kraft senkrecht zur Trennfläche der beiden Körper. Es ist nicht immer das Gewicht, z.B. Bremsbacke, Kupplung, Verschraubung, schiefe Ebene usw.

Versuche: Reibungskraft mit verschiedenen Flächen, Werkstoffen, Gewichten

Die Reibungskraft hängt nicht von der Größe der Fläche ab, weil die Flächenpressung mit steigender Fläche proportional sinkt.



Tatsächlich, besonders bei nicht starren Körpern, gibt es noch andere Einflussfaktoren, z.B. Fläche, Schlupf, Schmierung usw.. So haben Autoreifen die beste Haftung bei 10-20% Schlupf (ABS; 0% Schlupf heißt, dass keine Bremskraft abgerufen wird), niedriger Geschwindigkeit und niedrigem Luftdruck (Fläche).

FO Bremskraft [Bosch 21]

Kraft muss nicht nach unten wirken, z.B. Bremsbacke, Kupplung, schiefe Ebene [EuroTabM] „Reibung“

Bei Haftreibung hat noch keine Bewegung stattgefunden. Die errechnete Haftreibungskraft ist nicht die tatsächliche Kraft, sondern die Obergrenze der übertragbaren Kraft.

Dass die Haftreibung größer als die Gleitreibung ist, erfährt man beim Anschieben eines Kfz.

Überleitung an Hand TabB: Verhältnisse bei Rollreibung

Versuch: verschiedene Rollen auf Zahnstange

TabB: Der Rollreibungskoeffizient sinkt mit steigender Härte der Werkstoffe, vermutlich weil die plastische Verformung abnimmt. Der Einfluss der elastischen Verformung (hängt nicht von der Härte ab, unterliegt aber einer Hysterese durch innere Reibung) spielt keine große Rolle.

Je größer der Radius ist, desto geringer wird die Reibung, vergleiche mit den Rädern von Fahrrädern, Lokomotivrädern, Walzkörpern (Nadellager) usw. Lager sollen aber einen möglichst kleinen Durchmesser haben, da er in das Reibmoment eingeht.

Überleitung an Hand TabB: Verhältnisse bei Rollreibung

Typische ingenieurwissenschaftliche Vereinfachung.

→ [EuroTabM] „Reibung“

→ [EuroTabM] „Reibung“

EuroMRb27 S.110

HP 83/84 Hebestation

2) [EuroRBM] S.110 Aufg. 4) Müssen die beiden Schrauben mit der vollen Kraft oder mit der halben angezogen werden?

2 Kräfte addieren sich zur erforderlichen Normalkraft, deshalb genügt es, jede Schraube mit der halben Kraft zu belasten.

3) EuroMRb27 S.110 Aufg. 5) Warum wird mit 3,5 kN belastet, aber mit 5kN gerechnet?

4) EuroMRb27 S.110 Aufg. 6) Ültg zur schiefen Ebene

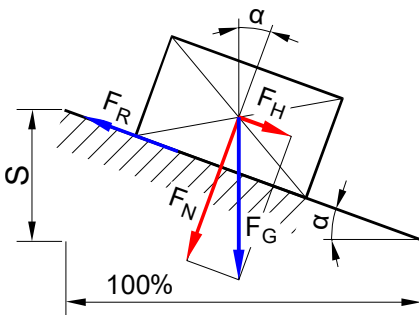


Schiefe Ebene

Kräfte

Steigung in %

$$\text{Steigung } S = \frac{h}{l} = \tan \alpha$$



Die Gewichtskraft F_G zerlegt sich in Hangabtriebskraft F_H

$$F_H = F_G \cdot \sin \alpha$$

F_H will den Körper beschleunigen

Normalkraft F_N

$$F_N = F_G \cdot \cos \alpha$$

F_N bremst den Körper indirekt durch

$$F_R = \mu \cdot F_N = \mu \cdot F_G \cdot \cos \alpha$$

Bewegung

tritt ein, wenn $F_H > F_R$ ist.

Reibwinkel

$$F_H = F_R$$

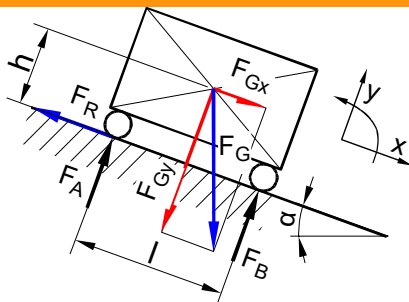
$$F_G \cdot \sin \alpha = \mu \cdot F_G \cdot \cos \alpha \rightarrow$$

$$\mu = \frac{F_G \cdot \sin \alpha}{F_G \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Vertiefung

- 1) Berechnen Sie die Bremskraft und den Reibungskoeffizienten eines Fahrzeuges aus seiner Masse und seinem Bremsweg (z.B. Volvo S80 mit 40,5m Bremsweg aus 100km/h bei 1695kg - mot 25/98 S.29) (Formel aus TabB "Beschleunigung")
- 2) Berechnen Sie Bremskraft und Bremsweg des selben Fahrzeuges bei 10% Gefälle / Steigung

Auflager



Die Lage des Schwerpunktes geht in die Drehmomente ein:

$$\Sigma M_A = F_B \cdot l - F_x \cdot h - F_y \cdot \frac{l}{2}$$

$$F_B = \frac{F_G \cdot \sin \alpha \cdot h + F_G \cdot \cos \alpha \cdot \frac{l}{2}}{l}$$

Vertiefung

MVK: ca. 90' Zeitbedarf

FTM, TG: entfällt

Steigung 100% bedeutet 45°.

Grafik

Obwohl Physiklehrer gerne den Eindruck erwecken, ist die Hangabtriebskraft definitiv keine eigenständige Kraft. Eigenständig sind die Gewichtskraft, die durch die Erdmasse per Raum-Zeit-Krümmung erzeugt wird, und die Reibungskraft, die aus dem Bewegungstrend des Körpers und der Normalkraft entsteht. Die Hangabtriebskraft ist ein bloßer Teil der Erdanziehungskraft; an die Hangabtriebskraft passt sich die Reibung an, oder der Körper beschleunigt.

-> [EuroTabM] „Schiefe Ebene“

Empirisch kann der Reibwinkel ermittelt werden, indem man die Unterlage kippt: Ein aufliegendes Teil beginnt beim Reibwinkel zu rutschen.

EurMRB ist wenig ergiebig

Koordinatensystem wird wegen der Bemaßung zweckmäßig parallel zur schiefen Ebene gelegt.

Es gibt zwei prinzipielle Vorgehensweisen:

- 1) Hebelarme zu F_G berechnen. Dieser Weg ist möglich, aber bei jeder Aufgabe anders zu lösen.
- 2) F_G wird in F_{Gx} und F_{Gy} zerlegt, anschließend rechnet man mit beiden Kräften. Bei diesem Weg ist die Vorgehensweise einfacher und immer gleich und deshalb weniger fehlerträchtig.

$$\Sigma M_B \text{ analog}$$

Abi-Aufgaben

Statik_TA_Schiefe-Ebene.odt

Sonstiges: Festigkeitslehre



Zugversuch

Zweck

- dient der Ermittlung des Werkstoffverhaltens bei einachsiger Zugbeanspruchung
- liefert wichtige Werkstoffkennwerte, die auf viele andere Belastungsarten übertragbar sind.

Durchführung

Zugprobe

wegen ihres Einflusses auf das Ergebnis sind genormt:

- Form (rund oder flach)
- Zylinderköpfe (glatt oder Gewinde)
- Oberfläche (Rz 6,3)
- Längenverhältnis (Proportionalstäbe)

Kurzer Prop.-Stab rund bzw. beliebig	Langer Prop.-Stab (für Sonderfälle)
$\frac{L_0}{d_0} = 5$ bzw. $\frac{L_0}{\sqrt{S_0}} = 5,65$	$\frac{L_0}{d_0} = 10$ bzw. $\frac{L_0}{\sqrt{S_0}} = 11,3$

Ablauf

man zieht die Zugprobe langsam und ruckfrei bis zum Bruch und zeichnet die Kraft F und Länge L auf.

Standardisierung

Werkstoffkennwerte werden unabhängig von den Maßen des Bauteiles angegeben.

Zugkraft $F \leftrightarrow$ Zugspannung σ_z

$$\sigma_z = \frac{F}{S_0} \quad \text{in} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = \text{MPa} \right] \quad S_0 = \text{Anfangsquerschnitt}$$

Längenänderung $\Delta L \leftrightarrow$ Dehnung ϵ

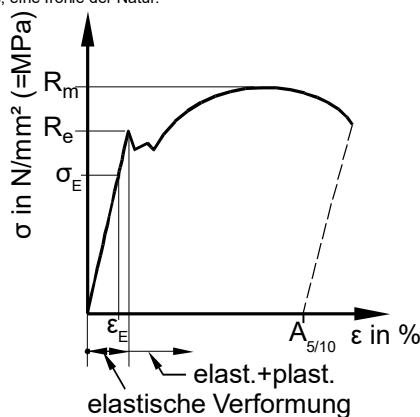
$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{in} \quad [\% \text{ oder o.E.}] \quad L_0 = \text{Anfangsmesslänge}$$

Die Werte werden aufgezeichnet im

Spannungs-Dehnungs-Diagramm

mit ausgeprägter Streckgrenze

[Schwab 2013] S.154: „... ausgeprägte Streckgrenze [tritt] nur bei wenigen Werkstoffen auf[...] .. ausgerechnet bei den einfachen Baustählen, der meistgebrauchten metallischen Werkstoffgruppe, eine Ironie der Natur.“



3) Beschreiben Sie den Kurvenverlauf (makroskopische Vorgänge)

4) Gleichmaßdehnung A_g ist verzichtbar

5) dann Bezug auf die mikroskopischen Vorgänge

AB verschiedene gezogene Zugproben

Quellen: DIN EN 10002:2001 Metallische Werkstoffe - Zugversuch in [Klein 2008], [Hering 1992], [Bargel/Schulze 2005]

1) Ein: Bauarbeiter unter schwebender Last; Bungeespringen

Was gibt dennoch einigermaßen Sicherheit?

2) Aufbau und Ablauf mündlich entwickeln, anschließend Zugversuch in der Werkstatt durchführen oder Video zeigen.

Prüfungen sind lange üblich, z.B. enthält [Musschenbroeck 1729] Hinweise zu Prüfmaschinen und Spannungsprüfungen bei Drähten [Ferguson 1992] S.204, Fußnote 9). Ein anderes Beispiel ist [Agricola 1548]

-> [EuroTabM] „Zugversuch“

FO verschiedene Zugproben

FO Einfluss des Längenverhältnisses auf die Bruchdehnung

AM Papierstreifen

FO gespannte und umgeformte Gewinde

Abhängig vom Längenverhältnis ist z.B. die Bruchdehnung A , weil die Verformung nach der Einschnürung nicht von der Anfangslänge abhängt.

Die Proportionalitätsfaktoren $k = 5,65$ bzw. $11,3$ ([Bargel/Schulze 2005] S.98; [EuroTabM] „Baustähle, unlegierte“) für beliebige Querschnitte wurden im Abi bisher nicht verwendet, sondern nur $L_0/d_0 = 5$ bzw. $L_0/d_0 = 10$ für runde Proportionalstäbe, gelegentlich mit Umrechnung in entsprechende Flachproben.

Die Proportionalitätsfaktoren $k = 5$ für runde Stäbe und $k = 5,65$ für beliebige Stäbe können ineinander umgerechnet werden.

$$\frac{L_0}{\sqrt{S_0}} = \frac{L_0}{\sqrt{\pi/4 \cdot d_0^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{\pi/4} \cdot d_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi/4}} \cdot \frac{L_0}{d_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi/4}} \cdot 5 \approx 5,65$$

Langsam und ruckfrei wegen dynamischer Kräfte, vergleiche: Spalten von Holz. Was langsam ist, hängt vom Werkstoff ab.

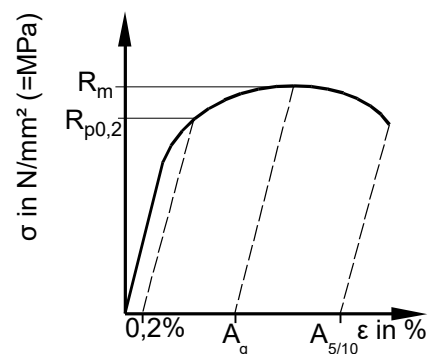
Damit die Ergebnisse unabhängig von der Probengröße werden, bezieht man sie auf Querschnittsfläche und Länge der Probe. Den Einfluss von Oberfläche und Längenverhältnis vernachlässigt man zunächst. Wenn es genauer sein muss: Im TabB sind die Streckgrenzen R_e bei Stahl abhängig von der Erzeugnisdicke angegeben, und bei der Bruchdehnung gibt man das Längenverhältnis als Index an, z.B. A_5 oder A_{10} , wg. des seines Einflusses.

Andere Beispiele: zulässige Stromdichte
Spannung ist auf Fläche bezogene Kraft.

Ingenieure rechnen mit Zugspannungen, die auf den Anfangsquerschnitt bezogen sind, und ignorieren, dass der Querschnitt kleiner und die tatsächlichen Spannungen größer werden, weil man Bauteile kaum noch beeinflussen kann. Dagegen betrachten Festkörperphysiker bei der Untersuchung von Werkstoffverhalten die tatsächlichen Spannungen im engsten Querschnitt.

100% = 1, kann in der Formel auch entfallen

ohne ausgeprägte Streckgrenze

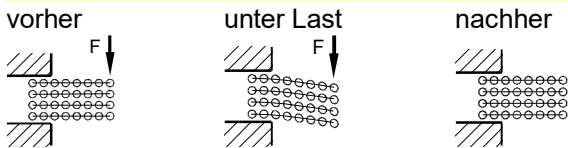


AB SDD kombiniert mit Gitterbildern und 2ten Achsen F und ΔL

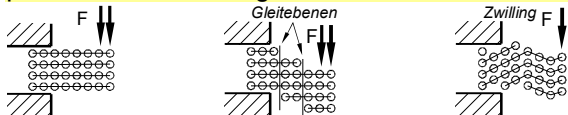
Werkstoff_TA_Zugversuch.odt

**Vorgänge im Werkstoff**

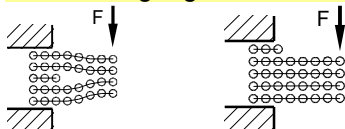
Metallische Gitter sind einfach angeordnet

elastische Verformung

Werkstoff verhält sich wie eine Feder und nimmt nach Entlastung die ursprüngliche Form wieder an.

Einschwingverhalten**plastische Verformung**

Werkstoff wird bleibend verformt

Kaltverfestigung.

Gitterfehler werden geschlossen, die Streckgrenze eines Metalles steigt beim Umformen (Walzen, Schmieden ...)

Hinweise: Einen gebogenen Draht kann man nicht einfach an der Biegestelle zurückbiegen. Bis zur Brucheinschnürung bleiben Zugproben zylindrisch, weil bereits gedehnte Bereiche eine höhere Festigkeit bekommen und die weitere Dehnungen erstmal woanders stattfindet.

EinschnürungNach Überschreiten von R_m tritt Einschnürung der Probe ein. Die Kraft im Diagramm sinkt bis zum Bruch.**Kennwerte aus dem Zugversuch**Es gilt das Hooke'sche Gesetz: $\sigma = E \cdot \epsilon$ **Streckgrenze R_e – Dehngrenze $R_{p0,2}$** = Grenze des elastischen Bereiches [$N/mm^2 = MPa$]**(Der) Elastizitätsmodul E**[kN/mm^2] (E-Modul)

- ist ein Maß für die Steifigkeit
- $E = \frac{\sigma_E}{\epsilon_E}$ mit einem Wertepaar (σ_E ; ϵ_E) von der Hooke'schen Geraden

Zugfestigkeit R_m in [$N/mm^2 = MPa$]

- das Überschreiten von R_m führt zum Bruch

Bruchdehnung A (=A₅) oder A₁₀

in [% oder ohne Einheit]

- Bleibende Verformung nach dem Bruch
- Index = Längenverhältnis der Zugprobe
→ starker Einfluss auf die Bruchdehnung (s.u.)

Brucheinschnürung Z

→ TabB

$$Z = \frac{S_0 - S_U}{S}$$

Streckgrenzenverhältnis V_s

$$V_s = \frac{R_e}{R_m}$$

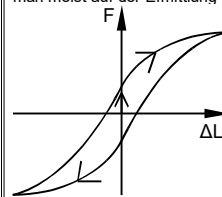
Vertiefung

1) Ordnen Sie Kurven mit verschiedenen Streckgrenzenverhältnissen zu:

Bruchgetrenntes Pleuel, FO Tiefziehen

Seil einer Hängebrücke (plastische Verformung erwünscht, um Überlastung anzuzeigen). Zum Thema → [Schwab 2013] „Kerbschlagbiegeversuch“

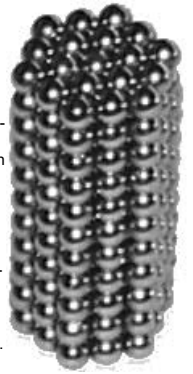
Tatsächlich ist die elastische Verformung im oberen Bereich nicht genau linear. Doch die Abweichungen von der Geraden sind schwer zu ermitteln und meist vernachlässigbar, sodass man meist auf der Ermittlung der Proportionalitätsgrenze verzichtet.

Hysterese
beim Zugversuch

Auch beim elastischen Verformen von Material kommt es durch innere Reibung zu einer Hysterese [Bargel/Schulze 2005] S.112. Deshalb wollen Radfahrer möglichst steife Fahrradbauteile.

AB HystereseMan unterscheidet: (1) linear elastisches Verhalten, für das das Hooke'sche Gesetz gilt (gilt für alle Festkörper für kleine Verformungen bis $\epsilon=0,1\%$); (2) nicht-linear- elastisches Verhalten, z.B. Gummi und (3) anelastisches Verhalten (elastische Hysterese): der Werkstoff gibt nicht mehr die ganze Verformungsenergie zurück [Hütte 29] D42. [Hering 1992] S.92.Mit der Dehnung ϵ erfolgt eine Verringerung des Querschnittes. Ihr Maß ist die Querkürzung $\nu = \frac{\epsilon_q}{\epsilon}$ bzw. die Poisson- oder Querdehnzahl ν . Sie beträgt für Stahl $\nu = 0,3$ [Decker 2009] S.30.**Sechseckige Säule aus Nanodots, Elmo:**

Bei Verdrehung ist die elastische und plastische Verformung gut zu sehen. Wenn man die mittleren Magnete entnimmt, wird die plast. Verformung zufälliger

Nach der 2011 geltenden Theorie entsteht die Einschwingphase ([GrundwissenIng14] S.533: Lüders-Dehnung) durch Zwischengitteratome (ZGA: C, N), die etwas größer als die Zwischengitterplätze sind und das Wirtsgitter verzerren. Durch die energetische Situation bewegen sich die ZGA bei angelegter (Zug-)Spannung auf die Versetzungen zu, bilden dort s.g. Cottrell-Wolken und blockieren plast. Vfg. (erhöhen Streckgrenze). Wenn sie bei R_{eH} endlich doch beginn, verlieren die C-Wolken ihre Wirkung und die relativ hohe Spannung dehnt den Werkstoff. Ohne Alterung zeigt der Werkstoff keine ausgeprägte Streckgrenze mehr. [de.Wikipedia.org/./Cottrell-Wolke], [Bargel/Schulze 2005] S.105f., [Schwab 2013] S.156f.

Umklappen eines nichtorthogonalen Gitters ist ebenfalls möglich. Gleitebenen gehören zu den typischen metallischen Eigenschaften. Sie werden möglich durch Isotropie (richtungsunabhängige Bindung) der Metalle, die zu einfachen und dichten Gittern führt.

Die Verschiebung endet an den Korngrenzen oder an Gitterfehlern.

Ohne Gitterfehler wären Metalle praktisch nicht verformbar bzw. bearbeitbar. Für monokristallines Fe wird $R_m \approx 14000 N/mm^2$ errechnet, tatsächlich ist R_m (Fe100) $\approx 150 N/mm^2$. Die Verschiebung entlang der realen Gitterebene muss also abgeschwächt sein.**Bruchmechanismen siehe [SdW] 01/2000**Die auf den Ausgangsquerschnitt bezogene Spannung sinkt im Diagramm jenseits von R_m , die tatsächliche Spannung unter Berücksichtigung des verengenden Querschnitts steigt aber weiter an; es tritt sogar noch Kaltverfestigung auf. Die tatsächliche Spannung spielt für den Ingenieur aber keine Rolle, solange er den Querschnitt an belasteten Stellen nicht wachsen lassen kann – wie die Natur es bei Bäumen, Knochen usw. tut ([Matthack 2003]).**→ [EuroTabM] „Zugversuch“**[Schwab 2013] S.149: R kommt von engl.: resistance für mechanischen Widerstand. DIN EN 10002:2001 unterscheidet Obere (R_{mH}) und untere (R_{mL}) Streckgrenze [Klein 2008], [Bargel/Schulze 2005]. Ich verwende die obere Streckgrenze R_m wie in → [EuroTabM] „Zugversuch“. R_p auch technische Elastizitätsgrenze.Dehngrenze: Bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Streckgrenze ist der Übergang von elastischer zu plastischer Verformung, von der Geraden zur Kurve, messtechnisch nur schwer erfassbar, außerdem wird der Werkstoff dort nicht voll ausgenutzt. Deshalb verwendet man die Dehngrenze, bei der ein bestimmtes Maß an plast. Verformung auftritt, $R_{p0,2}$ ist die gängigste.**→ [EuroTabM] „Elastizitätsmodul“; Tabellenwerte → [Hütte 29] E66 und D44**

Der (!) E-Modul ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Normalspannung und Dehnung. Bildlich ist er eine Federkonstante oder die Steigung der Hooke'schen (!) Geraden und damit die gedachte Spannung für 100% Dehnung. Vergleiche auch Schubmodul G für Schubspannungen und Kompressionsmodul K für hydrostatischen Druck.

[Bargel/Schulze 2005] S.97: Es gibt nichtlineare Elastizität (z.B. Grauguss), der E-Modul für Zug und Druck muss nicht symmetrisch sein (z.B. Sinterwerkstoffe, Nichtmetalle).

E-Modul aus SDD ermitteln (HP96/97-3) R_m ist eine rechnerische Größe mit dem Anfangsquerschnitt S_0 , die für Konstruktionen zweckmäßig ist. Will man das Werkstoffverhalten untersuchen, legt man den tatsächlichen Querschnitt zugrunde und erhält eine wesentlich größere Spannung.

[Schwab 2013] S.150: A kommt von vermutlich von frz. allongement für Dehnung.

 A_5 oder $A_{5,65}$ oder ohne Index sind kurze; A_{10} und $A_{11,3}$ lange Prop.-Stäbe.**FO Zugprobe: Folgen des Längenverhältnisses**

[Bargel/Schulze 2005] S.96: Die Rückfederung parallel zur Hooke'schen Geraden ist eine Vereinfachung, die bei höheren Temperaturen oder Kriechversuchen nicht zulässig ist.

Verhältnis kleinster Querschnitt nach Bruch zu Anfangsquerschnitt.

Verformungskennwerte (Bruchdehnung, Brucheinschnürung, Dehnung bei Höchstkraft) dienen nicht der Konstruktion, aber der Beurteilung des Werkstoffverhaltens.

Wird benötigt bei:

- Festigkeitsklassen von Schrauben
- Umrechnung von Brinellhärten auf R_m
- Anhaltswert der Verformbarkeit für Umformverfahren

Gespeicherte Energie im elastischen Bereich, Verformungsenergie im plastischen Bereich (Zähigkeit) und freierwerdende elastische Energie beim Bruch berechnen. [Hering 1992] S.92

Werkstoff_TA_Zugversuch.odt



Video Zugversuch

Zeigt Durchführung des Zugversuches und Ermittlung der Kennwerte

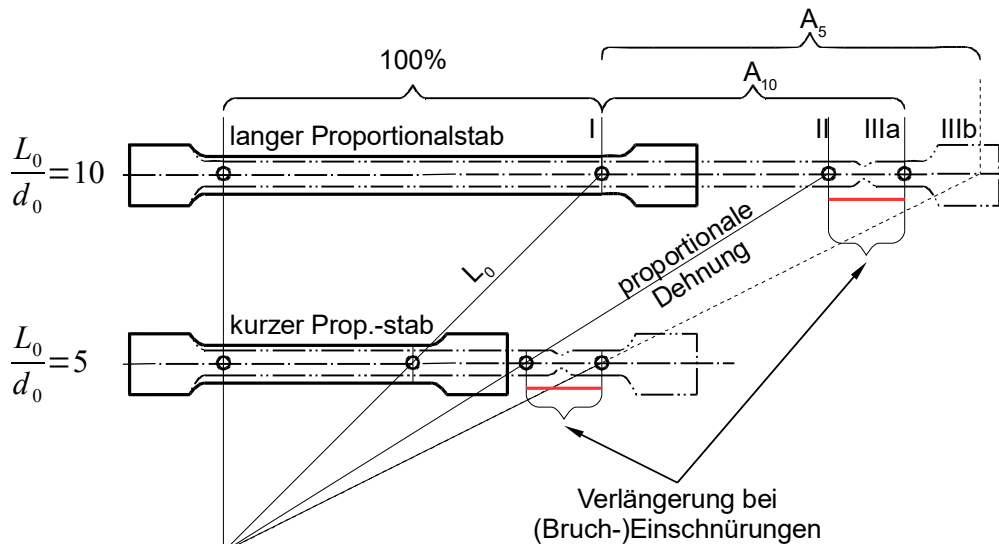
0050 Universalprüfmaschine
0075 genormter Prüfstab mit Gewindeköpfe
0100 genormte Geschwindigkeit, Dehnung, Schleppzeiger für F_m
0147 Einschnürung

0160 $R_m = F_m / S_0$
0170 Spannungs-Dehnungs-Diagramm
0185 R_{eH} , R_{eL} , R_m
0199 Diagrammschreiber, Kraftanzeige
0234 ohne ausgeprägte Streckgrenze, $R_{p0.2}$, F_m und ϵ -Anzeige; mehrmaliges Be- und Entlasten mit steigender Kraft zur Ermittlung von $R_{p0.2}$
0330 Zeichnerische Ermittlung
0340 Bruchdehnung messen
0376 Vergleich St-60 und St-37 im Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit Kraftanzeige

Bruchdehnung $A_5 \leftrightarrow A_{10}$

A_5 , $A_{5,65}$ = Bruchdehnung am kurzen Prop.-Stab
 A_{10} , $A_{11,3}$ = Bruchdehnung am langen Prop.-Stab
 A_5 , A_{10} : zylindrische Probe
 $A_{5,65}$, $A_{11,3}$: Flachprobe

[Schwab 2013] S.146: „Der kurze Proportionalstab ist Standard... Früher hat man den [langen Proportionalstab] gerne angewendet, weil die Längenmesstechnik noch nicht so ausgefeilt war. Heute findet man ihn eher selten, weil er von der Herstellung her teurer ist.“
[Schwab 2013] S.155f: „Statt A_5 wird seit einiger Zeit gerne auch nur A oder $A_{5,65}$ verwendet, statt A_{10} auch $A_{11,3}$. Das hängt mit den Faktoren 5,65 und 11,3 zusammen, ... die auch bei ... Proben und anderen Querschnittsformen sinnvoll sind.“



1) Unterschied langer / kurzer Proportionalstab?

Phase I: unbelastete Zugproben aus gleichem Werkstoff

2) Verhalten im elastischen Bereich?

Phase II: Proben werden dünner und länger, Dehnung ist bei gleicher Kraft bei den Proben proportional gleich

3) Verhalten bei Einschnürung?

Phase III: Dehnung findet fast (weglassen?) Kraft steigt nicht mehr) nur noch im Bereich der Einschnürung statt, die Längenänderung ist bei beiden Proben gleich → die Dehnung ist bei gleicher Kraft in einer längeren Probe proportional geringer.

4) Bruchdehnung?

Nach dem Bruch werden die Bruchstücke gegeneinander gedrückt und die Bruchdehnung gemessen.

A_g = Gleichmaßdehnung

Zusammenhang zwischen A_5 , A_{10} und A_g

Die Bruchdehnung $A_{5,10}$ [%] setzt sich zusammen aus der Gleichmaßdehnung A_g [%], die bei beiden Proben gleich ist, und der Längenänderung x [mm] bei der Brucheinschnürung, bezogen auf die ursprüngliche Länge L_5 bzw. L_{10} [mm]. Bei gleichem Querschnitt gilt: $L_{10} = 2 \cdot L_5$.

$$A_5 = A_g + \frac{x}{L_5} \Rightarrow \frac{x}{L_5} = A_5 - A_g$$

$$A_{10} = A_g + \frac{x}{L_{10}} = A_g + \frac{x}{2 \cdot L_5} \Rightarrow \frac{x}{L_5} = 2 \cdot (A_{10} - A_g)$$

$$A_5 - A_g = \frac{x}{L_5} = 2 \cdot A_{10} - 2 \cdot A_g \Rightarrow$$

$$A_g = 2 \cdot A_{10} - A_5$$

[Bargel/Schulze 2005] S.99: Nennt die Gleichung „hinreichend genau“.

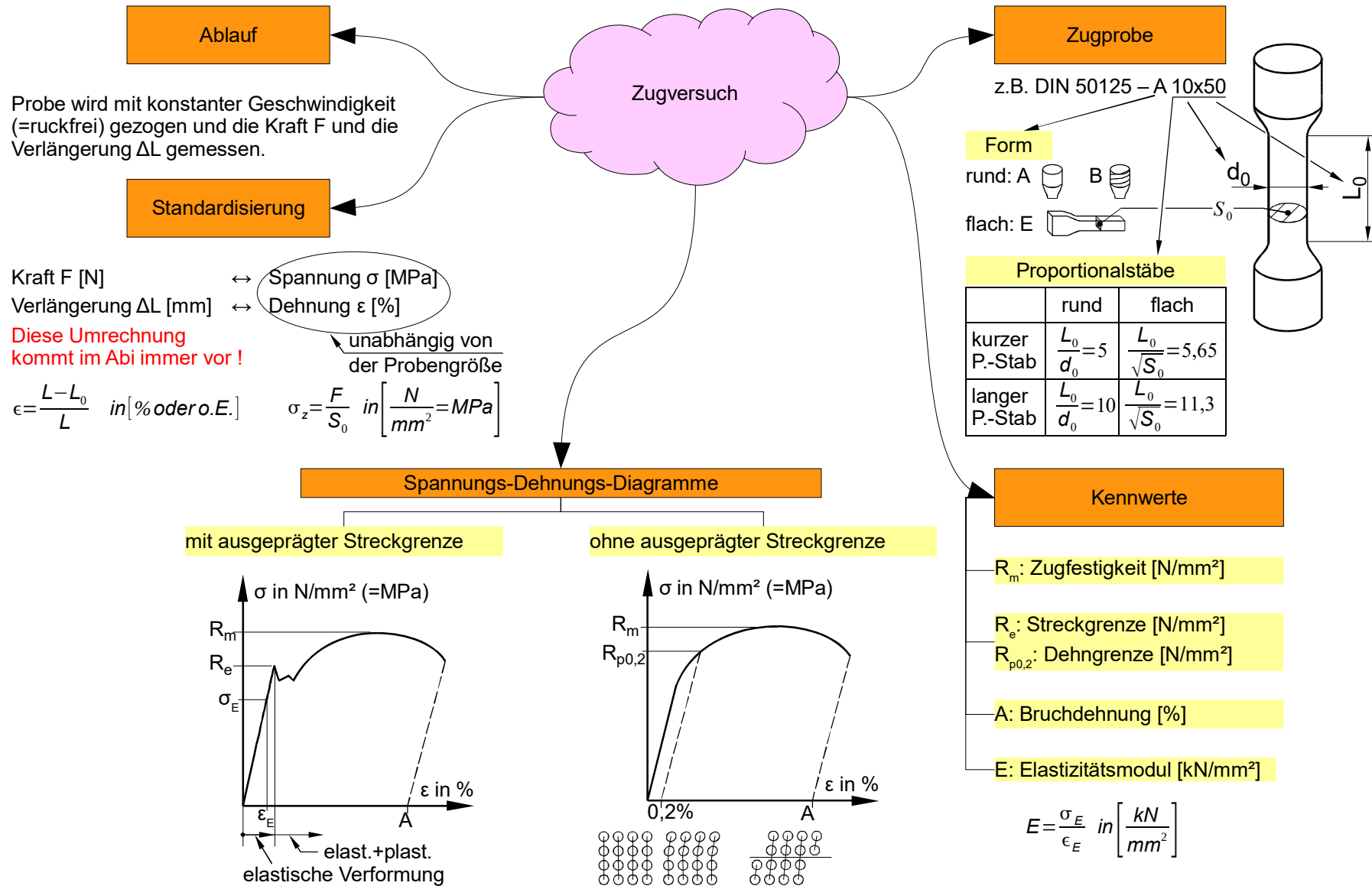
[Schwab 2013] S.149, Sinngemäß: „Es wurde genau untersucht und festgestellt, dass das Volumen einer Probe immer konstant bleibt.“ [Bargel/Schulze 2005] S.99: „Die mit der Längenänderung verbundene Verminderung des Querschnitts ist ... überwiegend darauf zurückzuführen, dass das Volumen annähernd konstant bleiben muss.“

Meine Vermutung: Es handelt sich wohl um die Frage, wie genau man es nimmt.

[Schwab 2013] S.149, Sinngemäß: „Bis R_m wird die Probe zwar länger und dünner, aber sie bleibt zylindrisch. Ursache ist eine Art innere Regelung durch Kaltverfestigung: Dort, wo die Probe etwas stärker gedehnt wird, steigt die Festigkeit, deshalb findet die weitere Dehnung zunächst an anderen Stellen statt. Die innere Regelung funktioniert nur bis zur so genannten Gleichmaßdehnung A_g , die laut SDD (S.148) und Text bei R_m auftritt. Gemessen wird sie wie A_5 und A_{10} abzüglich des elastischen Anteil.“ [Schwab 2013] S.155: „Die Gleichmaßdehnung ... ist ein Kennwert, der in der Umformtechnik sehr wichtig ist, vor allem, wenn es um Ziehen, Biegen oder Strecken geht. Die Gleichmaßdehnung wird immer im Höchstlastpunkt des Zugversuches erreicht.“ [Bargel/Schulze 2005] S.99: „In der Regel sinkt bei Einschnürung der Probe die übertragene Prüfkraft.“

Meine Vermutung: Auch hier geht es wohl nur um die Genauigkeit. Für mich klingt es jedenfalls seltsam, dass die Brucheinschnürung genau im Maximum des Diagramms ohne Knick beginnen soll.

Werkstoff_TA_Zugversuch.odt





Festigkeitsberechnung in Kurzform

Zugversuch

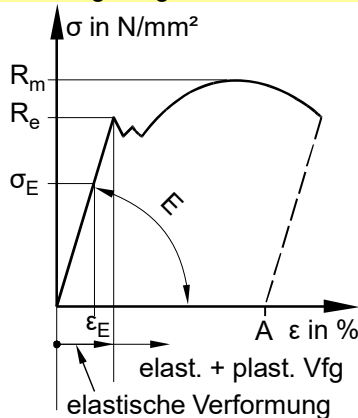
- 1) Probe ziehen
- 2) Kraft und Verlängerung messen
- 3) Wegen der Übertragbarkeit umrechnen

$$\text{Spannung } \sigma = \frac{F}{S} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Querschnitt}} \text{ in } \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \text{ oder MPa} \right]$$

$$\text{Dehnung } \epsilon = \frac{F}{S} = \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Anfangslänge}} \quad [\text{ohne Einheit}]$$

- 4) Im Diagramm darstellen

Spannungs-Dehnungsdiagramm



Werkstoffkennwerte σ_{lim}

= Grenzwerte

R_m Zugfestigkeit [N/mm²] („Bruchspannung“)
 $R_{p0,2}$ / R_e Dehngrenze / Streckgrenze [N/mm²]

Auslegung von Bauteilen

Die Reihenfolge hängt von der Aufgabe ab

1. Bauteil-Kräfte F oder -Momente M ermitteln s.o. (Statik)
2. F / M mit dem Querschnitt S / W in die Bauteil-Spannung σ / τ umrechnen

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

3. Werkstoffkennwert σ_{lim} / τ_{lim} ermitteln i.d.R. aus TabB

4. Aus σ_{grenz} / τ_{grenz} und der Sicherheitszahl v die zulässige Spannung σ_{zul} / τ_{zul} berechnen

$$\frac{\sigma_{grenz}}{v} = \sigma_{zul}$$

v ist abhängig von Belastungsfall (→ TabB), Wert, Folgen, Zuverlässigkeit der Bauteilspannung, Form des Bauteiles usw.

5. Prüfen, ob die zulässige Spannung σ_{zul} / τ_{zul} größer als die Bauteil-Spannung σ / τ ist.

$$\frac{\sigma_{grenz}}{v} = \sigma_{zul} > \sigma = \frac{F}{S}$$

Ansonsten neuer Querschnitt oder Werkstoff

Zur Wdh. oder Einführung, wenn es noch nicht unterrichtet wurde:
Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, Kennwerte, Formeln

1) Wozu dient die Ermittlung der Kräfte?

Zur Berechnung der Festigkeit, d.h. Vergleich tatsächlicher Kräfte mit Erlaubten.

2) Wie werden die einen Werkstoff maximal möglichen Kräfte ermittelt?
z.B. im Zugversuch

3) Wie wird der Zugversuch durchgeführt und ausgewertet?

Kraft und Verlängerung wird gemessen und in Spannung und Dehnung umgerechnet, damit die Werte übertragbar werden. Im Zugversuch wird der Anfangsquerschnitt S_0 verwendet, weil dies messtechnisch leicht erfassbar ist und der praktischen Realität entspricht.

$$\text{MPa} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^6 \frac{\text{N}}{(1000 \text{ mm})^2} = 1 \text{ Mio} \frac{\text{N}}{1 \text{ Mio mm}^2} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

► [EuroTabM46] „Zugversuch“

4) Welche Kennwerte sind für die Festigkeitsberechnung wichtig?

Kennwerte aus dem Zugversuch können z.T. auf andere Belastungsarten angepasst werden

Grobe Zusammenfassung, nicht im TG unterrichten

5) Wie stark muss die Welle ausgelegt werden?

Zur Begründung der Sicherheitszahl

Merke: „Eine genaue rechnerische Vorhersage der vorhandenen Bauteilsicherheit kann aufgrund der nur schwer erfassbaren Einflussgrößen, der z.T. recht erheblichen Streuung der Festigkeitswerte und der Vereinfachung im Rechnungsansatz nicht gemacht werden.“ [Roloff/ Matek 1995] S.52]

Für Grenzspannung ist der Belastungsfall zu beachten. Die angegebenen Werte gelten nur für einachsige Spannungszustände.

► [EuroTabM46] „Festigkeitswerte“

► [EuroTabM46] „Werkstoffe“



Kennwerte vom Zugversuch übertragen

komplett überarbeiten

Belastungsarten

Zugbeanspruchung

Druckbeanspruchung

für viele Metalle ist die Zug- und Druckkurve annähernd symmetrisch.

(Flächenpressung)

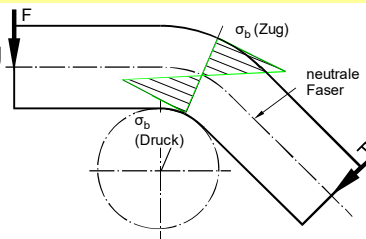
entspricht Druck zwischen festen Grenzflächen und hat eigene Kennwerte.

Abscherung

für viele Werkstoffe wird die Zugfestigkeit mit dem Faktor 0,8 umgerechnet.

Biegespannung

- kann direkt in Zug- und Druckspannung erklärt werden.



Torsionsbeanspruchung

- wird theoretisch durch Zugspannung erklärt und gerechnet.
- Der Bruchverlauf zeigt aber, dass es sich um mehrachsige Spannungszustände handelt. Deshalb werden i.d.R. eigene Grenzwerte verwendet.

Belastungsfall

dynamische, mehrachsige oder andere unüberschaubare Belastungen werden mit der Sicherheitszahl abgedeckt.

zulässige Belastung = Werkstoffkennwert / Sicherheit

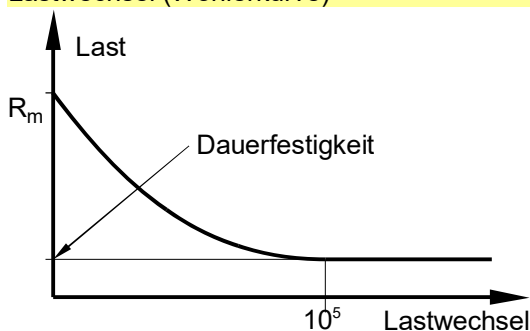
Abhängig von

- Belastungsfall
- Komplexität der Beanspruchung
- möglicher Schaden
- Wartung
- gesetzlichen Vorschriften
-

Andere Beispiele für Faktoren

- Kerbwirkungszahl
- Oberflächenbeiwert
- Größenbeiwert

Lastwechsel (Wöhlerkurve)



Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith

FTM, MVK, TG: Hintergrundinfo, nicht unterrichten

Einarbeiten: [Decker 2009]

1) Welches sind die 6 wichtigsten Belastungsarten ? oder

Mit welchen Methoden kann eine Kreide zerstört werden ?

Durchsprechen anhand

→ [EuroTabM45] „Festigkeitslehre“

Zähe Werkstoffe: Quetschgrenze σ_{qr} ist so groß wie Re.

Spröde Werkstoffe: Druckfestigkeit σ_{dr}

Gegenbeispiele: Gusseisen, Beton, Keramik (druck-, aber nicht zugfest), Seile

Die maximale zulässige Flächenpressung ist kleiner als die maximale Druckspannung, weil sich die Oberfläche nicht vollständig anschmiegt. Dies ist auch der Unterschied zum Druck. Ist keine klassische Spannung, wird aber ähnlich gerechnet.

AM gebogener Vierkant

Integral der Spannung mal Hebelarm und Flächenelement gleicht das Biegemoment aus.

AM gebogener Vierkant

Integral der Spannung mal Hebelarm und Flächenelement gleicht das Biegemoment aus.

Entwickeln anhand

→ [EuroTabM45] „Belastungsfälle“

anschließend Philosophie des Ingenieurs darstellen:

Probleme, die theoretisch noch nicht geklärt sind, werden durch Erfahrungswerte pragmatisch gelöst. Dies ergibt nicht unbedingt die optimale Konstruktion, aber es ergibt immerhin eine funktionierende Konstruktion – und der Spatz in der Hand ist bekanntlich ...

→ [EuroTabM45] „Festigkeitslehre“

Dauerschwingversuch nach DIN 50100

[EuroTabM46] S.46 Dauerfestigkeitsschaubild nach Smith einarbeiten.



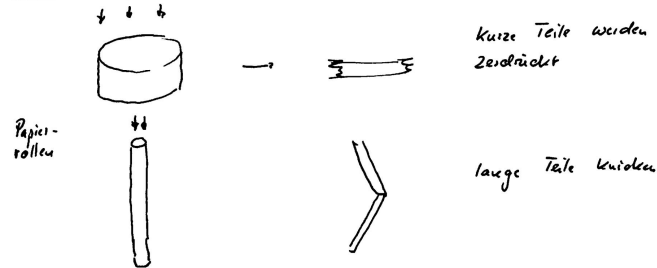
Knickfestigkeit

zulässige Knickkraft

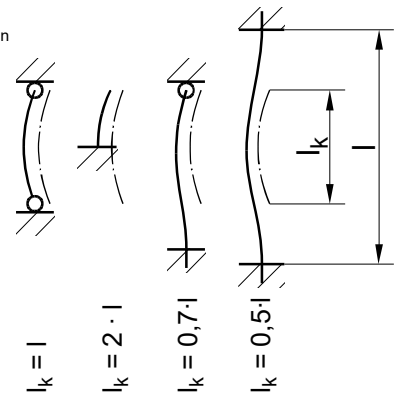
$$F_{K\text{ zul}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_K^2 \cdot v}$$

- E E-Modul [kN/mm²] → TabB
= Werkstoffkennwert
I Flächenmoment 2. Grades [mm²] → TabB
= Kenngröße für die Knickfestigkeit des Profils
l_K Klemmlänge [mm]
hängt von der Art der Einspannung ab
v Sicherheitszahl [] → TabB

knickfestigkeit



Bis [EuroTabM] bis Aufl.44 enthalten; [EuroTabM] Aufl.45 – 46 enthalten zwar noch die Grenzwerte, aber keine Formeln mehr.
FTM, TG: nicht im Lehrplan enthalten
MVK: bei Gelegenheit
Die Klemmlänge l_K ist die Länge, die vergleichbar einer beidseitig drehbaren Einspannung ist..



Festigkeit_TA_Knickung.odt

Sonstiges: Maschinenelemente

Vergleich Wälzlager Gleitlager

Gleitlager

- + hohe Drehzahl möglich,
- + außer beim Anlauf kein Verschleiß im Dauerlauf unbegrenzte Lebensdauer
- + höhere Tragfähigkeit (außer bei kleinen Drehzahlen)
- + unempfindlich gegen Stoßbelastung
- hohes Anlaufmoment
- aufwendige Schmierung, Überwachung nötig
- hohe Rundlaufgenauigkeit

Wälzlager

- geringer Reibung und Wärmeentwicklung
- hohe Tragfähigkeit bei kleinen Drehzahlen
- empfindlich gegen Schmutz und Stöße
- laut
- begrenzte Lebensdauer und Drehzahl (zu hohe Drehzahl: Fliehkräfte; zu kleine Drehzahl: Last nur auf wenigen Wälzkörpern)
- geringer Schmierstoffverbrauch
- genormte Lagergrößen
- Ausgleich von Fluchtungsfehlern durch Pendellager

ME_TA_Lager-Vergleich.odt



Wälzlager

Entwicklung mündlich, dann Eintrag ins

AB Wälzlager: Bauarten und Betriebsbedingungen

andere Anwendungen:

AM Kugelumlaufspindel, Linear-Wälzlager

Aufbau

- innerer und äußerer Laufring (können entfallen)
- Wälzkörper (Kugeln, Zylinder, Kegel, Tonnen, Nadeln, mehrreihig?)
- Lagerkäfig (kann entfallen)
- Schmiermittel

Bauarten und Eigenschaften

→ [EuroTabM46] "Wälzlager, Auswahl"

Rillenkugellager

- mittlere radiale und axiale Kräfte
- höhere Drehzahlen (wg. Flächenträgheitsmoment)
- billiger

Zylinderrollenlager

- größere Kräfte möglich

Pendelrollenlager

Toroidalrollenlager

Wälzkörper sind ähnlich länglichen Tonnen

Auswahlkriterien

Platzverhältnisse, Belastung, Schiefstellung, Genauigkeit, Drehzahl, Geräuscharmer Lauf, Steifigkeit, axiale Verschiebbarkeit, Ein- und Ausbau, Abdichtung

Vertiefung

Schmierung

Fett (häufig auf Lebensdauer) schützt gegen Schmutz
Öl (-bad, -umlauf, -nebel)

Ein- und Ausbau

schrumpfen
pressen
schmutzempfindlich

Lageranordnung

Jede Lagerung benötigt genau ein Festlager, das axiales Verschieben verhindert (axiale Kräfte aufnimmt). Alle anderen Lager müssen Loslager sein, damit die Lagerung nicht verkleben kann.

Sonstiges

Vertiefung

AM mitlaufende Zentrierspitze

- 1 Welches Bauteil (Reitstockspitze, Körnerspitze, Pinole)
- 2 Welche Kräfte muss das Teil aufnehmen und wohin werden sie geleitet
hohe radiale Kräfte durch Gewicht des Werkstückes und Zerspankräfte; hohe axiale Einspannkräfte drücken auf die Zentrierspitze; geringe axiale Kräfte durch Eigengewicht und beim Ausspannen sollen über den Werkzeugkegel in den Reitstock
- 3 Zentrierspitze muss drehbar gelagert werden. Wie ist sie gelagert?
Wälzlager, der Begriff fasst Kugellager und Rollenlager zusammen.
- 4 Warum verwendet man keine Gleitlager
Gleitlager benötigen hohe Drehzahlen, haben hohes Anlaufmoment und Verschleiß beim Anlaufen, beim Drehen gibt es häufig niedrige Drehzahlen und Anlaufen.

AM verschiedene Wälzlager, Perla aufgeklappt

- 5 Welche Teile haben alle Wälzlager gemeinsam?
- 6 Aufgaben des Lagerkäfigs
Wälzkörper gleichmäßig auf Umfang verteilen
verhindert bei zerlegbaren Lagern das Auseinanderfallen der Wälzkörper
- 7 Eigenschaften und Werkstoffe für Lagerkäfig und Lauffläche?
Lauffläche: gehärteter, geschliffener, polierter Stahl für geringen Verschleiß
Käfig aus weichem Messing, siehe Werkstoffe für Gleitlager
- 8 Aufbau eines Wälzlagers beschriften
AB Wälzlager
- 9 Welcher nicht zum Lager gehörende Stoff ist unverzichtbar: Schmierstoff
- 9 Tragen Sie die Kräfte ein, die auf die Zentrierspitze wirken.
- 10 Wie nennt man Kräfte, die in Richtung Drehachse / Radius wirken?
- 11 Wählen Sie geeignete Lager aus der Übersicht aus?
- Kriterien: Aufnahme der Kräfte, Einbaumaße: Nadellager nach Abmaßen; Axiallager wegen der großen axialen Kraft; Kerola, Schrägrolle oder Rikula für kleine axiale Kraft
Veranschaulichung der größeren Auflagefläche
Versuch Wälzkörper (Rolle, Kugel) auf Folie stempeln

Eigenschaften laut [SKF 2008] S.34

- für mittlere Radiallasten und Axiallasten
- geringe Reibung
- sehr hohe Genauigkeit möglich
- geräuscharm möglich

AB Wälzlager Aufgabe 4

AM zerlegte Zentrierspitze

Enthält Radial-Rikula (Lager billig, genau, mittlere axiale Kräfte möglich, nicht nachstellbar).

Eigenschaften laut [SKF 2008] S.34

- sehr hoch belastbar
- winkelbeweglich

Eigenschaften laut [SKF 2008] S.780: „CARB Toroidallager sind einreihige Lager mit langen, leicht bälligen Rollen. Die Laufbahnen im Innen- und Außenring sind konkav ausgeführt und liegen zentrisch zur Lagermitte. Die optimal aufeinander abgestimmten Laufbahnprofile stellen eine vorteilhafte Spannungsverteilung im Lager und reibungsarmen Lauf sicher.

- winkelbeweglich
 - axial beweglich
 - sehr hohe Tragfähigkeit
- [Steinilper 2007 II] S.140

Ähnliche Maschinenelemente

Linearwälzlager, Kugelumlaufführung

Bild Linearwälzlager → [Steinilper 2007 II] S.147

tgtm NP2009/10-3 Seilwinde

tgtm HP2007/08-3 Rollenhalterung

Schrumpfen mit Trockeneis bei -50°C oder im Ölbad bei 80-100°C.

Ein- oder auspressen mit Abziehvorrichtung oder Montagehülse, damit die Kraft nicht über die Wälzkörper geleitet wird.

Korrosionsschutzmittel nie entfernen als Schutz gegen Schmutz

1) Wie viel Spiel soll die Spindel haben?

Das Lagerspiel soll gering sein und ist mit einem Hakenschlüssel über die Mutter einstellbar. Die Mutter soll auch gegen Schmutz von außen und Fett von innen dichten. Lager mit einstellbarem Spiel sind einreihige Schrägkula, KeRola (Roloff/Matek).

2) Wie verändert sich die Spindel beim Dauereinsatz?

Reibung, Wärme, Temperaturerhöhung, Längenausdehnung, Verspannen, Klemmen.

3) Rechenbeispiel

Stahl, $l=100\text{mm}$, $D_t=10\text{K}$, $D_l=0,01\text{mm}$; Rikula, Normalklasse, Bohrungs $\varnothing 30\text{mm}$, Lagerluft (radial l) = $2...20\text{ }\mu\text{m}$ (SKF Hauptkatalog 1984 S113)

Bilder von Wälzlagerschäden → [Steinilper 2007 II] S.188ff

FO verschiedene Lagerungen

FO Kreissägenwelle o.ä.

Ütg können Rikula als Loslager eingesetzt werden?

Ja, bei geeigneter Auswahl der Passungen → TabB



Gleitlager

Reibungszustände

trockene Festkörperreibung

Oberflächen berühren sich und verformen sich. Bei Bewegung führen Schwingungen zu Wärme und Energieverlust (Reibung). Hoher Druck, Geschwindigkeit und ungünstige Werkstoffe führen zu teilweiser oder völliger Verschweißung (z.B. Kolbenfresser). Reibung und Verschleiß sehr groß, Einfluss auf Maß und Oberflächen

Mischreibung

Schmierstoff zwischen Gleitflächen, diese berühren sich aber noch stellenweise. Reibung und Verschleiß sind geringer als bei trockener Reibung, aber für Dauerbetrieb ungeeignet

Flüssigkeitsreibung

ist verschleißfrei

tragender Schmierfilm hängt ab von:

- Umfangsgeschwindigkeit der Welle
- den äußeren Kräften
- Lagertoleranz und Oberfläche
- Ölviskosität
- Lagerabmessungen (Breite, Durchmesser)
- konstruktive Hilfen zur Schmierfilmbildung

Bauarten

Hydrodynamische Lager

- Ölzufuhr im Bereich geringen Druckes
- Schmierkeil verstärkt den Druck
- Verschleiß beim Anlaufen

Hydrostatische Lager

- Öldruck wird künstlich aufgebaut
→ drehzahlunabhängig
- konstruktiv aufwendig
- nur für hochbelastete Ausführungen

Werkstoffe für Gleitlager

Cu-Legierungen, Sintermetalle, Kunststoff (PTFE Polytetrafluorethylen), Sn, Pb, Zn, Al, Gusseisen

Werkstoffe für Lager und Zapfen und Schmierstoff müssen abgestimmt sein

Sinterlager

- mit Schmierstoff getränkt :
p Notlaufeigenschaften, wartungsarm

Gleitlagerbuchsen

→ [EuroTabM] "Gleitlager, Buchsen"

Verbundgleitlager

Entwicklung anhand

AB Gleitreibungsarten

Im Stand: Festkörperreibung

Beim Anlauf wird Schmierstoff mitgenommen und zwischen Lager und Zapfen gepresst (gepumpt). Durch Viskosität und die Verengung (Keilwirkung) entsteht Druck, der die Welle anhebt.

Mit steigender Drehzahl steigt der Druck, die Welle wird zentriert. Die Festkörper sind völlig getrennt, es gibt keinen Verschleiß mehr. Reibung findet nur noch im Schmierstoff statt, hier schadet die Viskosität.

FO Wasserski-Schleppanlage

Vgl.: Wasserski, Aquaplaning, Lebensdauer des Turbinenrades vor der GS Lörrach

Ütg: Welche konstruktive Hilfen gibt es?

FO Druckverteilung in einem hydrodynamischen Gleitlager (HTFK1 S316)

: Mehrflächengleitlager EuroM50 S317 B4: Keilform beachten

FO Öltaschen, Keilspalt HTFK1 S315

Hydrodynamisch: Schmierstoff wird im Bereich geringen Druckes zugeführt (Zufuhrdruck, darf tragenden Film nicht unterbrechen), wird aber kurz vor Bereich des höchsten Druckes gebraucht: darf tragenden Film nicht unterbrechen, muss aber dort schnell zur Verfügung stehen. Keilspalt ist konstruktiv aufwendig und von der Drehrichtung abhängig, baut aber den Druck besser auf. Sie können mit Ölzufuhr kombiniert werden.

Ütg: Wie kann Nachteil des hydrodynamischen Lagers bei geringen Drehzahlen ausgeglichen werden

FO Hydrostatisches Lager HTFK1 S315

Schmieröl wird an mehreren Stellen ins Lager gepresst (p bis 200bar), die Welle schwimmt unabhängig von der Drehzahl in der Lagerschale.

z.B. Turbinen, Kraftwerksgeneratoren

FO Kippbare Lager HTFK1 S316

Sonstige: Kippbare Lager gleichen Wellenversatz und Fluchtungsfehler aus

Vgl: Kugelbrunnen

[Roloff/Matek 1995] S.461

1) Gleiteigenschaften mündlich durchsprechen, damit die Schüler ein gewisses Verständnis für die Anforderungen entwickeln.

2) Werkstoffe durchgehen anhand

→ [EuroTabM] "Gleitlager, Werkstoffe"

Eigenschaften für Lagerwerkstoffe

Belastbarkeit: etwa: zulässige mittlere Flächenpressung im Betrieb

Schmiegsamkeit: Fähigkeit, sich ohne bleibende Schäden durch elastische und plastische Verformung an Beanspruchung anzupassen

Anpassungsfähigkeit: Ausgleich von Abtragung durch Schmiegung und Verschleiß

Einlaufverhalten: Anpassung an erhöhte Anfangsreibung und Anfangsverschleiß

Einbettfähigkeit: Fähigkeit, Fremtteilchen aufzunehmen

Verschleißwiderstand: Reaktion auf Abtrennung kleinster Teilchen

Verschleißwiderstand: Widerstand gegen adhäsive Bindung mit dem Gegenwerkstoff

Notlaufeigenschaften: Fähigkeit, zeitlich begrenztes Gleiten bei ungünstiger Schmierung aufrecht zu erhalten.

Riefenbildungswiderstand

Wärmeleitfähigkeit

Ütg: Wie meist gibt es den idealen Werkstoff mit allen Eigenschaften nicht:

FO Verbundgleitlager

- Stahlstützschale, Tragschicht, Nickeldamm, Laufschrift (gesinterte Bronze mit PTFE oder Blei als Schmiermittel), meist zweiteilig für leichteren Einbau



Mechanische Getriebe

Aufgabe

- Drehzahländerung
- Drehsinnänderung
- Drehmomentänderung

Nicht schaltbare Getriebe

Getriebe mit gestufter Übersetzung

arithmetische Drehzahlstufung

Der Abstand a zwischen zwei angrenzenden Abtriebsdrehzahlen ist konstant,

z.B. 100 - 120 - 140 - 160 .. 1/min

geometrische Drehzahlstufung

Das Verhältnis q zwischen zwei angrenzenden Abtriebsdrehzahlen ist konstant,

z.B. 56 - 90 - 140 - 224 .. 1/min

Schieberädergetriebe

- Die Übersetzungsstufen werden durch axiales Verschieben eines Räderblockes eingestellt
- Betätigung von Hand, hydraulisch, pneumatisch, elektrisch, ...
- Nur ohne Last und bei geringen Drehzahlunterschieden schaltbar.

Kupplungsgetriebe

- Funktion: Die Zahnradpaare sind ständig im Eingriff. Das Schalten erfolgt, indem ein Zahnradpaar mit der Welle verknüpft wird.

Schaltmuffengetriebe

- Drehzahlangleichung ist notwendig

Schaltklauengetriebe

- Funktion: Die Zahnradpaare sind abwechselnd mit der Antriebs- und der Abtriebswelle verbunden. Die Gänge werden durch Verschieben der Zahnräder geschaltet, die mit ihrer Welle verbunden sind. Diese Zahnräder verbinden sich dann über Klauen mit ihren losen Nachbarn und verbinden sie mit der Welle, sodass das benachbarte Zahnradpaar überträgt.
- Drehzahlangleichung ist notwendig.

Ziehkeilgetriebe

- Funktion: Die Zahnäder einer Seite sind fest mit ihrer Welle verbunden, die anderen werden durch einen Keil, der in der Hohlwelle verschoben wird, mit der Welle verbunden.
- platzsparend, leicht schaltbar

Planetengetriebe

- Funktion: durch Bremsen von Sonnenrad, Planetenradträger oder Himmelsrad (Hohlrad) und durch Austausch von Antrieb und Abtrieb ergeben sich 6 Übersetzungen, durch Verblockung aller Räder ergibt sich der 7. direkte Gang.
- + Viele Abstufungen auf engem Raum

Getriebe mit stufenloser Übersetzung

Reibradgetriebe

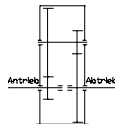
- Funktion: kegelige Antriebs- und Abtriebscheibe steht im Reibschluss mit der Abtriebscheibe. Die Übersetzungsänderung wird durch radiales Verschieben der Antriebscheibe erzeugt.

Zugmittelgetriebe

z.B. Keilriemenverstellgetriebe mit Breitkeilriemen oder Schubgliederkette

Vertiefung

Getriebe übersetzen Drehmoment oder Drehzahl
Kupplungen übertragen das Moment immer 1:1



Sonstige

hydrodynamische Drehmomentwandler

= Zwitter zwischen Kupplung und Getriebe

- vgl. hydrodynamische Drehmomentwandler. Eigenschaften
 - kein mechanischer Verschleiß
 - geschmeidiger Anfahrvorgang, Motor kann beim Anfahren nicht abge-
würgt werden
 - Drehmomentverstärkung passt sich selbsttätig und stufenlos an
 - maximales Drehmoment bei Anfahren unter Vollast
 - Drehschwingungen des Motors werden durch das Öl aufgefangen
 - kompakte Bauweise, geräuscharmer Lauf
 - niedrigerer Wirkungsgrad als mechanische Kupplungen

EuroM50

Dazu können auch Antriebe gerechnet werden, die geradlinige in drehende Bewegung u.U. umwandeln: Kurbelschwingegetriebe, Ventilsteuerung durch Nockenwelle, Kurbeltrieb.

EuroM50 S337 „Getriebe“ Getriebemotor

z.B. um Drehmoment aus einem schnelllaufenden E-Motor zu holen.

z.B. für die Antriebe von Arbeitsspindeln und für Vorschübe.

EuroM50 S337 „Getriebe“ Schieberädergetriebe

AM Schieberädergetriebe (Metallabteilung)

z.B. an Werkzeugmaschinen

EuroM50 S325 „Wellen“ Getriebewelle

AM aufgeschnittenes Kfz-Getriebe

z.B. in Kfz

EuroKfz25 S370 Bild 2

OH-Modell Sperrsynchrisation

z.B. für Krad-Getriebe, deren Gänge in Folgeschaltung durchgereicht werden

FO Ziehkeilgetriebe HTFK2

z.B. in Krätern, Ständerbohrmaschinen

OH-Modell Planetengetriebe

z.B. in Automatikgetrieben mit Drehmomentwandlern

verändern die Übersetzung innerhalb gewisser Grenzen stufenlos. Dadurch ist es möglich, Motoren ständig im optimalen Bereich zu betreiben.

EuroM50 S338 „Getriebe“ Reibradgetriebe

FO Keilriemenverstellgetriebe

FO, OH-Modell Schubgliederautomatik EuroKfz25 S387

z.B. stufenlose Getriebe im DAF; Schubgliederautomatik im Mercedes ?, übrigens mit Magnetpulverkupplungen

- *An welchem Wellenende wird der schnelllaufende E-Motor angeschlossen ?*

- *Woran ist dieses Wellenende von außen erkennbar ?*

- Es hat den kleineren Durchmesser, weil es nicht so viel Drehmoment übertragen muss.

FO hydrodynamischer Drehmomentwandler EuroKfz25 S378

Pumpenrad treibt Öl durch die Fliehkraft nach außen und lenkt es dann um das Leitrad herum gegen das Turbinenrad. Dieses dreht sich durch die Bewegungsenergie des Öls und leitet das Öl gegen seine Bewegungsrichtung (Impulsverstärkung) auf die Schaufeln des Leitrades. Diese stauen bei großem Drehzahlunterschied (Anfahren) das Öl zunächst, sodass sich durch den Rückstau das Drehmoment auf dem Turbinenrad verstärkt (um den Faktor 1,5 bis 4,5, Wandlungsbereich). bei annähernd gleicher Drehzahl dreht das Leitrad so schnell, dass seine Schaufeln von hinten angeströmt werden. Der Rückstau und damit die Drehmomentverstärkung entfallen (Kupplungsbereich). Mischung zwischen Getriebe und Kupplung !



Riementriebe

übertragen Drehmomente zwischen Wellen auch bei hohen Drehzahlen und Achsabständen

Merkmale

- + elastisch, leise, schwingungsdämpfend
- + keine Schmierung erforderlich
- + große Distanzen möglich
- + preisgünstig (?)
- + Ausgleich von Wellenversatz
- großer Platzbedarf
- hohe Lagerbelastung
- Schlupf (außer bei Zahnriemen)

übertragbares Drehmoment

hängt ab von

- Reibungszahl μ
- Normalkraft F_N
- Umschlingungswinkel
- Skizze, Formel

Bauarten

Flachriemen

ermöglichen kleine Scheibendurchmesser aus Leder, Kunststoff oder Gewebe
mindestens eine Scheibe muss ballig sein

Keilriemen

verstärken Normalkraft durch Keilform.
Verbundwerkstoff

Merkmale

- + mehrere Keilriemen nebeneinander möglich
- hohe Walkarbeit, geringerer Wirkungsgrad
- teurer als Flachriemen
- begrenzte Achsabstände

Bauarten, Maße, übertragbare Leistung

Normalkeilriemen

Schmalkeilriemen

Breitkeilriemen

XPC o.ä. Keilriemen mit Zahnücken zur Verringerung der Walkarbeit und Erhöhung des Wirkungsgrades

Synchronriemen (Zahnriemen)

- ± formschlüssig
- + kein Schlupf
- + kleinere Vorspannung und Lagerbelastung

Bauarten, Maße, übertragbare Leistung

Rundriemen

für kleine Leistungen

Mehrkeilriemen, Keilrippenriemen

auch beidseitig

- leicht biegsam
- rückwärts biegsam

EuroM50

1. ?
- 2.

Quellen: Roloff/Matek

FO Keilriemenverstellgetriebe

FO Schubgliedergetriebe

Querverweis: Keil- und Zahnriemen vertragen keine Ölspritzer und sind deshalb abgedeckt.

Querverweis: Kräftezerlegung

durch die notwendige Vorspannung, wird durch Spannrolle noch erhöht

Schlupf ist zwingend erforderlich, da der Reibungskoeffizient erst bei einem gewissen Schlupf seinen maximalen Wert erhält.

Die Umfangsgeschwindigkeit der getriebenen Scheibe ist niedriger als die der Antreibenden. Die Keilform der Keilriemen verstärkt die Normalkraft.

Spannrolle in der Nähe der kleineren Scheibe vergrößert den deren Umschlingungswinkel und gleichzeitig die Spannkraft.

Riemengeschwindigkeiten bis 100m/s, Leistungen bis 6000KW

$$F = P / v = 6\text{MW} / 100\text{m/s} = 60\text{kN}$$

z.B. für Innenschleifspindeln, da sehr schwingungsarm.

Querverweis: Kräftezerlegung

Meister sollen die Kräftezerlegung durchführen

Querverweis: Kräftezerlegung

Meister sollen die Kräftezerlegung durchführen

z.B. Lkw Antrieb der Nebenaggregate

EuroM50 S331 „Keilriemen“ Bilder

EuroTabM39 S209 „Keilriemen“

z.B. für Keilriemenverstellgetriebe, Motorroller

z.B. Vorschubantriebe von NC-Maschinen, Nockenwellenantriebe von Pkw.

Zahnriemen von Pkw gegen Öl abschirmen.

EuroM50 S331 „Keilriemen“ Bilder

EuroTabM39 S209 „Zahnriemen, Synchronriemen“

z.B. Kassettenrekorder.



Zahnradarten

Bei Zahnradern mit Außenverzahnung erfolgt Drehrichtungsumkehr, bei Zahnradern mit Innenverzahnung nicht.

Aufgaben

- konstante Übersetzung bei jeder Zahnstellung
- abwälzen statt gleiten

Verzahnungsarten

Zykloidenverzahnung

Konstruktion → EuroTabM „Zykloide“

- entsteht durch Abwälzen eines Kreises auf einer Ebene oder einem Zylinder.
- + näher an der idealen Wälzkurve
- + genauer
- + Belastbarkeit prinzipiell höher
- Zahnrad sind kombinierbar, wenn derselbe Rollkreis und derselbe Teilkreis vorliegt.
- Herstellung und Werkzeuge sind teuer, weil für jeden Teilkreis ein eigenes Werkzeug benötigt wird.
- Achsabstände sind nicht korrigierbar

→ Feinmechanik

Evolventenverzahnung

Konstruktion → EuroTabM „Evolvente“

- entsteht, wenn ein gespannter Faden von einem Zylinder abgewickelt wird.
- + geringe Abweichungen des Achsabstandes beeinflussen das Abwälzen der Zahnflanken kaum
- + Ein Werkzeug kann unabhängig von der Zähnezahl eingesetzt werden.
- + kostengünstige Herstellung, da das Grundprofil einer Zahnstange mit geraden Flanken entspricht.
- o Räder sind kombinierbar, wenn der selbe Modul vorliegt.
- geschwächter Fuß bei kleinen Zähnezahlen (Unterschnitt, Gegenmittel: Profilverschiebung)

→ Maschinenbau

Normalverzahnung

ist eine Evolventenverzahnung mit einem Eingriffswinkel $\alpha = 20^\circ$

Kammverzahnung

Flusskraftwerk .. wurde noch 2000f mit einem Zahnrad aus Buchenholz aufbereitet (Aufgabe eines Kammachers)

Triebstockverzahnung

Verzahnungsrichtung

gerad-	schrägverzahnt	pfeil-
<ul style="list-style-type: none"> + billig - der ganze Zahn greift schlagartig ein → laut - es trägt immer nur ein Zahn 	<ul style="list-style-type: none"> + geräuscharm + kann größere Kräfte übertragen (mehrere Zähne im Eingriff) - Axialkraft → Lagerbelastung 	<ul style="list-style-type: none"> - Lagerkräfte heben sich auf → für große Kräfte
	i.d.R. Schrägungswinkel $\beta = 8 \dots 25^\circ$	

Geometrie

Teilkreis	ist der Kreis, auf dem die Zähne (gedacht) ineinandergreifen. Er bestimmt das Übersetzungsverhältnis.
Teilung p	ist der Abstand der Zähne von einer rechten (linken) Teilflanke zur anderen in Höhe des Teilkreises.
Modul m [mm]	ist der Abstand der Zähne von einer rechten (linken) Teilflanke in Höhe des Teilkreises, bezogen auf den Durchmesser. Sonderfall schrägverzahnte Zahnrad: Stirnmodul m_t statt Normalmodul m_n verwenden.
Kopfspiel c	Abstand zwischen Fußkreis des einen Zahnrades und Kopfkreis des anderen Rades
Fußkreis	geht durch den tiefsten Punkt der Zähne
Kopfkreis	geht durch den höchsten Punkt der Zähne
Zahnhöhe h	Abstand zwischen dem Fußkreis und dem Kopfkreis.
Zahnkopfhöhe h_a	Abstand zwischen Kopfkreis und Teilkreis.
Zahnfußhöhe h_f	Abstand zwischen Teilkreis und Fußkreis

Wenn Modul, Zähnezahl und Kopfspiel festliegen, können alle anderen Maße ermittelt werden.

[3] [Gieck 1995] [4] [Dubbel 13 I]

Ültg von den Getrieben

Welches ist die häufigste Getriebeart ?

Zahnradtriebe, weil sie den höchsten Wirkungsgrad bei dem geringsten Raumbedarf haben.

Zahnflanken sollen sich aufeinander abwälzen und dabei möglichst wenig gleiten, um Erwärmung, Verschleiß, Geräuschentwicklung und Spiel möglichst gering zu halten.

Verzahnungsgesetz: Bei jeder Zahnstellung sollen Übersetzungsverhältnis und damit die Umfangsgeschwindigkeit gleich bleiben.

Außerdem soll die Verzahnung kostengünstig hergestellt werden können.

Die Startlinie für 1000m-Läufe im Leichtathletik-Stadion ist eine Evolvente

Evolvente Innenverzahnung hat konkave Flächen.

Eingriffswinkel: Wenn auf einer Zahnstange die Evolvente mit einer Fadenabwicklung erzeugt würde, wäre der Zahn am Fuß rechtwinklig zum Grundkreis und neigte sich dann immer mehr. Man hat sich deshalb auf einen Eingriffswinkel geeignet, nämlich 20° bei der Normalverzahnung. Dies ist der Winkel der Zahnflanke am Teilkreis und bei einer Zahnstange.

Vergleiche: Fräser

z.B. Kfz-Getriebe: alle Gänge außer Rückwärtsgang (singt, geringere Lebensdauer)

Bei der Kräftezerlegung muss man von der Normalkraft ausgehen, da die Stützfläche nur solche überträgt.

Schuhmacher fährt im Ferrari geradverzahnte Zahnrad, weil die fehlenden Axialkräfte kleinere Lager und leichtere Bauweise ermöglichen.

[EuroTabM] "Zahnrad Berechnung"

AB Zahnradfertigung

Teilkreisdurchmesser d, Teilkreisumfang U

$$U = z \times p = p \times d$$

$$m \times p = p ; \quad d = z \times m \quad (\text{für Geradverzahnung})$$

Modul $m = 1 \text{ mm}$ heißt, dass die Zähne 3,1415... mm Abstand haben.

Der Bezug auf den Durchmesser wurde eingeführt, um unendliche Dezimalzahlen bei der Teilung durch p zu vermeiden.

Das Kopfspiel soll 0,1 ... 0,3 m betragen, häufig ist $c = 1,67 \text{ m}$.

$$h = 2 m + c \quad (\text{für Normalverzahnung?})$$

$$h_a = m \quad (\text{für Normalverzahnung?})$$

$$h_f = m + c \quad (\text{für Normalverzahnung?})$$



Fertigung einer Evolventenverzahnung

Gleiches Werkzeug für einen Modul und alle Profilverschiebung
Wälzfräsen, -schleifen; Profilfräsen; Spritzgießen / Druckgießen; Schmieden; Pressen, Sintern

Profilfräsen

jede Flanke für sich

andere

Zahnstange mit Eingriffswinkel 20°

Vorschub \approx Wälzbewegung

Schnittbewegung quer zur Zahnflanke erfolgen.

Vorteil der Evolventenverzahnung:

- Zahnstange hat gerade Flanken
→ Grundprofil ist leicht herstellbar
- Ein Werkzeug für jedes Modul genügt

Unterschneidung

entsteht bei zu geringen Zähnezahlen

bewirkt Verlust der Festigkeit

Profilverschiebung

Zweck

- bestimmter Achsabstand kann genau erreicht werden

- Zahnfuß kann dicker werden (positive Profilverschiebung) → größere Tragfähigkeit

Nullgetriebe: ohne Profilverschiebung

V-Null-Getriebe: Profilverschiebungen, die sich aufheben

V-Getriebe: verschiedene Profilverschiebungen

Vertiefung

[EuroM56] "Zahnräder"

Standardverfahren für Betriebe, die nicht mit aufwendigen Maschinen ausgerüstet sind.

FO Wälzhobeln

Eingriffswinkel 20° muss definiert werden. Mathematisch folgt dies daraus, dass die Abwicklung eines Fadens auf einem sehr großen Durchmesser senkrecht verläuft. Zahnräder, die ineinander greifen, müssen gleichen Modul und gleichen Eingriffswinkel haben. Der Eingriffswinkel ist mit 20° genormt, der Modul hängt vom Teilkreisdurchmesser ab.

[Roloff/Matek 1995] einarbeiten

[Klingelnberg 1967] S.828

"Bei positiver Profilverschiebung wird das Verzahnwerkzeug um den Betrag $+x_m$ vom Teilkreis des zu verzahnenden Rades so abgerückt, dass die Zähne weniger tief in den Radkörper eingeschnitten werden." [Klingelnberg 1967] S.830
Man spricht bei Profilverschiebung auch von V-Rädern [3]
Form eines runden Werkzeuges zur Zahnradherstellung.

AB Maschinenelemente 2: Zahnräder



Literaturverzeichnis

- Agricola 1548: Georg Agricola, De Re Metallica libri XII - 12 Bücher vom Berg- und Hüttenwesen, 2003?
BadZtg: , Badische Zeitung,
Bargel/Schulze 2005: H.-J. Bargel, G. Schulze, Werkstoffkunde, 2005
Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999
Böge Technologie: Alfred Böge, Technologie/Technik für Fachgymnasien und Fachoberschulen, 1994
Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009
Bosch 21: Ulrich Adler ua., Kraftfahrtechnisches Taschenbuch, 1991
Culmann 1866: Karl Culmann, Die grafische Statik, 1866
Decker 2009: Decker et al., Maschinenelemente, 2009
Dubbel 13 I: Ch. Bouché ua., Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau I, 1974
Duden 2006: -, Duden - Die deutsche Rechtschreibung, 2006
EuroM56: Ulrich Fischer ua., Fachkunde Metall 56.Auflage, 2010
EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,
EuroTabM: diverse, Tabellenbuch Metall,
EuroTabM: Ulrich Fischer ua., Tabellenbuch Metall,
EuroTabM45: Ulrich Fischer ua., Tabellenbuch Metall 45.Auflage, 2011
EuroTabM46: Roland Gommeringer ua., Tabellenbuch Metall 46.Auflage, 2014
EuroTabM47: Roland Gommeringer ua., Tabellenbuch Metall 47.Auflage, 2017
Ferguson 1992: Eugene S. Ferguson, Das innere Auge - von der Kunst des Ingenieurs, 1993
Ganten 2003: Detlev Ganten ua., Naturwissenschaft - Alles, was man wissen muss, 2003
Gieck 1995: K. + R. Gieck, Technische Formelsammlung, 1995
Gross 2015: Dietmar Gross u.a., Technische Mechanik 3, 2015
GrundwissenIng14: Ekbert Hering (Hrsg.), Karl-Heinz Modler (Hrsg.), Grundwissen des Ingenieurs, 2007
Haberhauer 2008: Horst Haberhauer, Ferdinand Bodenstern, Maschinenelemente - Gestaltung, Berechnung, Anwendung, 2008
Hering 1992: Ekbert Hering ua., Physik für Ingenieure, 1992
Hütte 29: Ahrendts ua., Hütte - die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 1989
Klein 2008: Dieter Alex ua., Klein Einführung in die DIN-Normen, 2008
Klingelnberg 1967: G. Brühem u.a., Klingelnberg - Technisches Hilfsbuch, 1967
Kurrer 2002: Karl-Eugen Kurrer, Geschichte der Baustatik, 2002
Mattheck 2003: Claus Mattheck, Warum alles kaputt geht, 2003
Müller-Breslau I: Heinrich F.B. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 1901
Müller-Breslau III: Heinrich F.B. Müller Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen - Band II Zweite Abtheilung, 1908
Musschenbroeck 1729: Pieter van Musschenbroek, Dissertationes physicae experimentalis et geometricae de magnetibus, 1729
Roloff/Matek 1995: Matek et al., Maschinenelemente, 1995
Roloff/Matek 2011: Herbert Wittel et al., Roloff/Matek Maschinenelemente, 2011
Schneider21: Andrej Albert ua., Bautabellen für Ingenieure, 21.Auflage., 2014
Schwab 2013: Rainer Schwab, Werkstoffkunde und Werkstoffprüfung für Dummies, 2013
SdW: wechselnde Autoren, Spektrum der Wissenschaft,
SKF 2008: n.n., SKF Hauptkatalog - Das Wälzlagerhandbuch für Studenten, 2008
Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014
Steinhilper 2007 I: Albers u.a., Konstruktionselemente des Maschinenbaus 1, 2007
Steinhilper 2007 II: Albers u.a., Konstruktionselemente des Maschinenbaus 2, 2007
Tipler 1995: Paul Tipler, Physik, 1995
Varignon 1725: Pierre Varignon, Nouvelle mecanique ou statique, 1725
Wikipedia: , , 07.03.2010, 16:45, <http://de.wikipedia.org/wiki>