



Aufgaben

Wahrscheinlichkeit P:

- 1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln mit einem Wurf
 - a) die Zahl 3 zu würfeln?
 - b) eine gerade Zahl zu würfeln.¹
- 2 In einer Schraubenpackung mit 5000 Schrauben sind 5 Ausschussschrauben. Gesucht ist P dafür, beim Herausnehmen einer Schraube eine Ausschussschraube zu erwischen.²
- 3 Gesucht ist P dafür, mit zwei Würfeln
 - a) die Summe 7 oder
 - b) die Summe 4 zu würfeln.³

kombinierte Wahrscheinlichkeiten

- 4 Auf dem Hof einer Lackiererei haben 8% der Kfz Läufer (Fall A) und unabhängig davon 10% der Kfz Farbfehler (B). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt ein Dieb im Dunkeln ein Kfz
 - a) mit beiden Fehlern (= Läufer UND Farbfehler)
 - b) mit mindestens einem Fehler (=Läufer ODER Farbfehler)
- 5 Gesucht ist P dafür, aus einem Beutel mit zwei roten und drei weißen Kugeln in zwei Zügen zwei rote Kugeln zu ziehen.
 - a) ohne Zurücklegen
 - b) mit Zurücklegen.⁴
- 6 Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man im Skat (2 von 22 unbekannte Karten)
 - a) den Kreuzbuben?
 - b) den Kreuz- oder den Pikbuben?
 - c) den Kreuz- und den Pikbuben?⁵
- 7 Ein Ehepaar möchte Kinder. Wie groß ist P, dass sie
 - a) 3 Buben und 1 Mädchen bekommen?
 - b) erst 3 Buben und dann 1 Mädchen bekommen?
 - c) 4 Mädchen bekommen?⁶
- 8 Wenn man beim Mensch-ärgere-dich-nicht aus dem Loch muss, darf man 3 mal würfeln und muss dabei eine 6 bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?⁷
- 9 Wie groß ist im Lotto (6 aus 49) die Wahrscheinlichkeit für
 - a) für 6 Richtige?
 - b) für 5 Richtige?
 - c) für 4 Richtige?
 - d) für 3 Richtige?
 - e) für 5 Richtige mit Zusatzzahl?⁸

1 a) $P=1/6$ b) $P=3/6$

2 $P=5/5000$

3 a) $P=6/36$ b) $P=3/36$

4 a) $P=0,008$ b) $P=0,172$

5 a) $P=0,100$ b) $P=0,160$

6 a) $P=1/22 + 21/22 \cdot 1/21 = 1/11 = 0,091$ b) $P=82/462$ c) $P=2/462$

7 Wir rechnen damit, dass Jungen und Mädchen gleich häufig geboren werden (50:50). Tatsächlich sind es etwas mehr Jungen.

a) $P=0,25$ b) $P=1/16$ c) $P=1/16$

8 $P=0,42$

9 a) $P=1/13983816$ b) $P=1/54200,8$ c) $P=1/1032,4$

d) $P=1/56,7$ e) $P=1/2330636$

- 10 Zwei Zocker werfen eine Münze und wer nach 9 Würfeln öfter gewonnen hat, soll den ganzen Einsatz bekommen. Als sie von einer Razzia gestört werden, verteilen Sie den Einsatz nach den verbleibenden Gewinnchancen.¹⁰
 - a) Wie groß sind die Anteile beim Stand von 4:3?
 - b) Fermat schlug vor, das Spiel gedanklich zu Ende zu spielen und den Einsatz nach der Anzahl der Möglichkeiten zu verteilen. Kritiker meinten, ein Wurf dürfe nicht mehr zählen, wenn das Spiel entschieden sei. Klären Sie die Situation mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaums.
 - c) Berechnen Sie mit einer Verteilungsfunktion, wie der Einsatz beim Stand von 3:2 verteilt wird.

Nach: Devlin: Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks, München 2009

Für Profis

- 11 Ein Hepatitis-Testverfahren erkennt 98% aller getesteten Kranken richtig und stuft 1% aller Gesunden als krank ein. Wie groß ist die Hoffnung, doch gesund zu sein, wenn man zufällig ausgewählt wurde und der Test „krank“ ergab?
 - a) bei einem Anteil von 0,1% kranker Personen innerhalb der getesteten Gruppe?
 - b) bei einem Anteil von 10% kranker Personen innerhalb der getesteten Gruppe?¹¹
- 12 Eine Zockerpartie
Auf dem Tisch befinden sich sechs Felder, die mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 markiert sind. Die Spieler setzen, indem sie Geld in ein Feld legen. Es wird mit drei Würfeln gewürfelt. Zeigt einer der Würfel die Zahl des Feldes an, dann erhält der Spieler außer seinem Einsatz die gleiche Menge noch einmal. Zeigen zwei Würfel die Feldzahl an, dann erhält der Spieler zum Einsatz die doppelte Summe. Erscheint die Feldzahl auf allen drei Würfeln, dann gibt es Einsatz plus dreifache Summe. Zeigt jedoch keiner der Würfel die richtige Feldzahl an, dann kassiert der Spielmacher den Einsatz.
 - a) Wer hat die besseren Chancen? Der Spielmacher oder Spieler?¹²
- 13 Das Ziegenproblem
In einer Gameshow sind hinter 3 Toren ein Auto und zwei Ziegen verteilt. Der Kandidat gewinnt das Auto, wenn er das richtige Tor findet. Das Spiel läuft in 3 Schritten ab:
 - 1) Der Kandidat wählt ein beliebiges Tor.
 - 2) Der Moderator öffnet eines der Tore, das nicht gewählt wurde, und zeigt eine Ziege.
 - 3) Der Kandidat darf seine erste Wahl ändern.
 - a) Soll der Kandidat bei seiner ersten Wahl bleiben oder ein anderes Tor wählen?¹³

Nach Marilyn vos Savant, geschildert in [SdW] 11/1991

10 Das Spielabbruchproblem ist vermutlich der Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ab dem 16. Jhd. u.Z. war es offenbar so drängend, dass sich zahlreiche Mathematiker damit beschäftigten, ua. Pierre de Fermat (ca.1608-1665).

a) 3:1 b) s.u. c) 68,75%

11 a) 91,1% b) 8,4 %

12 Der Spielmacher, denn der Spieler erhält von jedem € Einsatz nur 92,1Cent zurück.

13 Wenn er das andere Tor wählt, gewinnt der Kandidat das Auto mit der Wahrscheinlichkeit von 2/3, sonst nur zu 1/3. Also sollte er wechseln!

Lösungen

Wahrscheinlichkeit P:

- 1
- a) Geg $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \cong 6$ mögliche Ereignisse; $A = \{3\} \cong 1$ untersuchtes Ereignis
Lsg $p(A \text{ aus } S) = 1/6 = 16,7\%$
- b) Geg $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \cong 6$ mögliche Ereignisse; $A = \{2; 4; 6\} \cong 3$ untersuchte Ereignisse
Lsg $p(A \text{ aus } S) = 3/6 = 0,5 = 50\%$
- 2 $p(5 \text{ aus } 5000) = 5/5000 = 0,001 = 0,1\%$
- 3 Mit zwei Würfeln kann man alle Summen zwischen 2 und 12 würfeln, allerdings sind diese Summen nicht gleich wahrscheinlich, weil die Zahl 5 durch die Kombinationen 1+4; 2+3; 3+2 und 4+1 gewürfelt werden kann, während die Zahl 2 nur durch einen Pasch aus zwei Einsen gewürfelt werden kann. Man muss deshalb Ereignisse gleicher Wahrscheinlichkeit suchen. Es bietet sich an, die Würfelsummen in einer Matrix zu ermitteln.

	Würfel 2						
W	1	2	3	4	5	6	
ü	1	2	3	4	5	6	7
r	2	3	4	5	6	7	8
f	3	4	5	6	7	8	9
e	4	5	6	7	8	9	10
l	5	6	7	8	9	10	11
1	6	7	8	9	10	11	12

Jedes dieser Matrixfelder ist gleich wahrscheinlich, deshalb ist diese Darstellung für das Wahrscheinlichkeitsgesetz geeignet.

- a) Es sind 36 Ereignisse möglich, davon interessieren alle Ereignisse mit der Würfelsumme 7, das sind 6 untersuchte Ereignisse.
Lsg $p(\{7\} \text{ aus } 36) = 6/36 = 1/6 = 16,7\%$
- b) Lsg $p(\{4\} \text{ aus } 36) = 3/36 = 1/12 = 8,3\%$

kombinierte Wahrscheinlichkeiten

- 4
- a) $P(\text{ODER}) = 0,08 + 0,10 - (0,08 \times 0,10) = 0,172$
- b) $P(\text{UND}) = 0,08 \times 0,10 = 0,008$
- 5 Als Teilerperimente für den Wahrscheinlichkeitsbaum bieten sich die Züge an: 1. Kugel, 2. Kugel. Die Wahrscheinlichkeiten für die Äste des W-Baumes ergeben sich jeweils aus dem (Rest-) Inhalt des Beutels.
- a) $P = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,10$
„Ohne Zurücklegen“ verändert mit jedem Zug die Wahrscheinlichkeiten. Man nennt es eine hypergeometrische Verteilung. Sie entspricht eher der Realität, weil Stichproben nicht zurück gelegt werden, war aber ohne Computer schwerer zu berechnen.
- b) $P = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0,16$
„Mit Zurücklegen“ macht die Züge unabhängig voneinander, man nennt es eine binomiale Verteilung. Sie wird oft statt der hypergeometrischen Verteilung für Berechnungen verwendet, weil sie rechnerisch leichter zu handhaben ist.

- 6 Das 1. Teilerperiment für den W-Baum ist das Ziehen der ersten Karte, das andere Teilerperiment ist das Ziehen der zweiten Karte.
- a) $P(\{\text{Kreuzbube}\} \text{ aus } 22 \text{ ODER } \{\text{Kreuzbube}\} \text{ aus } 21)$
 $P = \frac{1}{22} + \frac{21}{22} \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{22} = \frac{1}{11} = 0,091$
- b) $P = \frac{2}{22} + \frac{20}{22} \cdot \frac{2}{21} = \frac{82}{462} = 0,1774892$
nicht ganz doppelt so groß wie a) weil auch Kreuz-UND Pikbube möglich ist. Beweis: b) + c) = 2 · a)
- c) den Kreuz- UND den Pikbuben?
 $P = \frac{2}{22} \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{462} = 0,0004329$
- 7 Die Teilerperimente entsprechen Geburten.
- a) 3 Buben und 1 Mädchen bekommen?
 $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (Baumdiagramm)
- b) erst 3 Buben und dann 1 Mädchen bekommen?
 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
- c) 4 Mädchen bekommen?
 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
- 8 Die Teilerperimente entsprechen den Würfeln, wobei der W-Baum an den Ästen abbricht, an denen eine 6 gewürfelt wurde..
- $$P = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,42$$

9 Zum besseren Verständnis befindet sich unten ein vereinfachter Wahrscheinlichkeitsbaum für Lotto.

a) 6 Richtige

Im ersten Zug hat man noch 6 günstige von insgesamt 49 Möglichkeiten. Wenn eine falsche Zahl gezogen wird, ist man aus dem Rennen und braucht nicht weiter zu rechnen. Also fehlt im zweiten Zug eine günstige Zahl und es bleiben nur noch 5 günstige von insgesamt 48 möglichen Zahlen usw. Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige beträgt.

$$P(6) = \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13'983'816}$$

b) Für 5 Richtige kann man sich eine falsche Zahl erlauben. Das kann sein im ersten Zug:

$$P(5)_1 = \frac{43}{49} \cdot \frac{6}{48} \cdot \frac{5}{47} \cdot \frac{4}{46} \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44}$$

oder im zweiten Zug:

$$P(5)_2 = \frac{6}{49} \cdot \frac{43}{48} \cdot \frac{5}{47} \cdot \frac{4}{46} \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44}$$

oder später. Man erkennt, dass die einzelnen Wege die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, weil die Zahlen über und unter dem Bruchstrich nur ihre Reihenfolge ändern. Da es insgesamt 6 Wege zu 5 Richtigen gibt, kann man die Wahrscheinlichkeit eines Einzelweges mit 6 multiplizieren und erhält so die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige:

$$P(5) = 6 \cdot \frac{43 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{1}{54200,8}$$

c) Für 4 Richtige beträgt die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Weges

$$P(4)_1 = \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{6}{47} \cdot \frac{5}{46} \cdot \frac{4}{45} \cdot \frac{3}{44}$$

Es gibt $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ Wege, also ist die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige:

$$P(4) = 15 \cdot \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{6}{47} \cdot \frac{5}{46} \cdot \frac{4}{45} \cdot \frac{3}{44} = \frac{1}{1032,4}$$

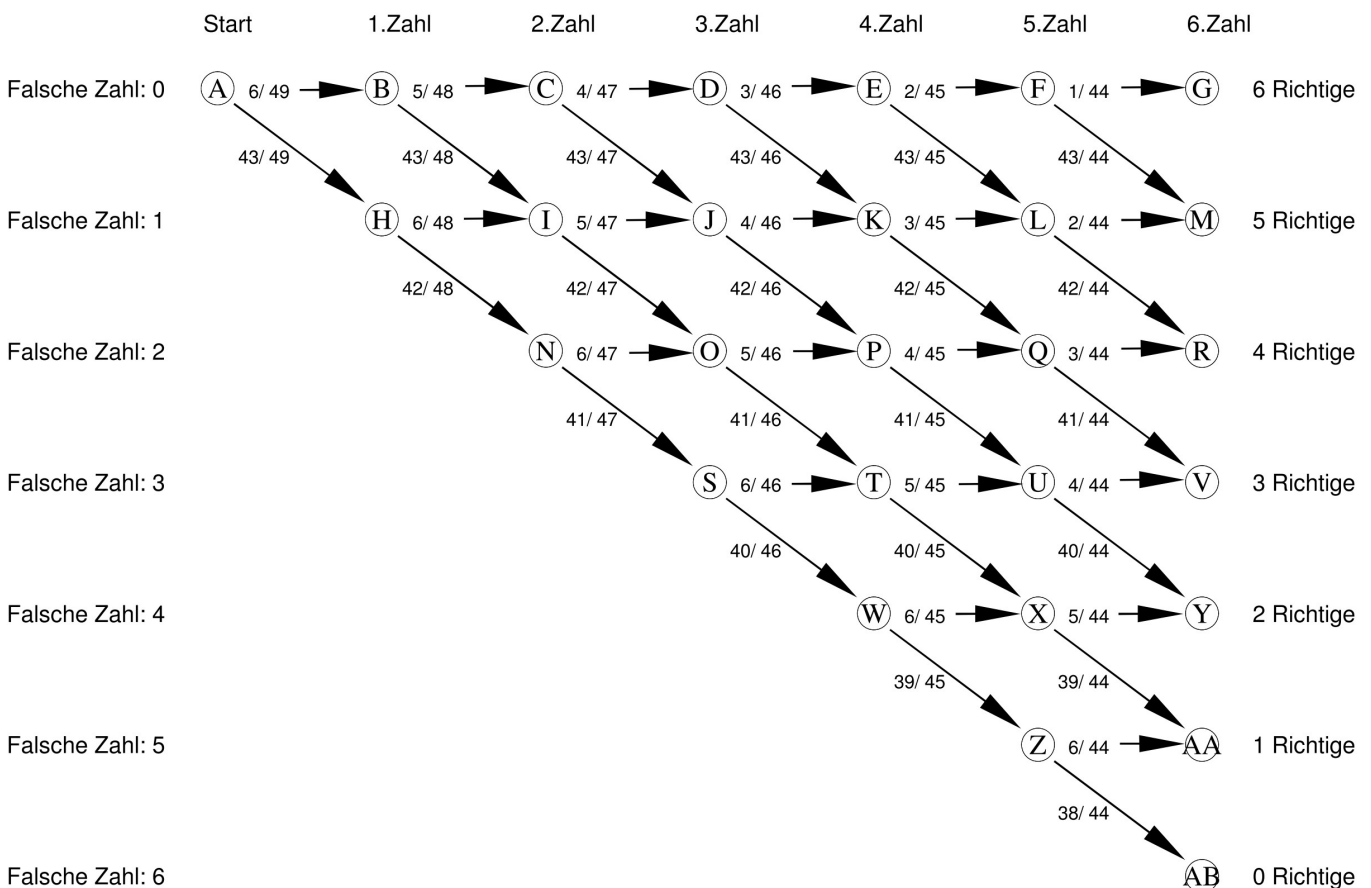
d) Für 3 Richtige (20 Wege) erhält man:

$$P(3) = 20 \cdot \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{6}{46} \cdot \frac{5}{45} \cdot \frac{4}{44} = \frac{1}{56,7}$$

e) Für 5 Richtige mit Zusatzzahl kann man sich zwar keine falsche Zahl erlauben, aber die Zusatzzahl. Deshalb kann man wie bei der Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige rechnen, muss aber statt der 43 Möglichkeiten für eine falsche Zahl nur 1 Möglichkeit für die Zusatzzahl einsetzen.

$$P(5 + \text{Zusatz}) = 6 \cdot \frac{43 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{1}{2'330'636}$$

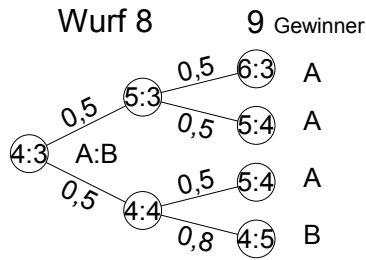
Man kann auch überlegen, dass jede der 6 Möglichkeiten einer 5 mit Zusatzzahl genauso wahrscheinlich ist wie 6 Richtige. Dann muss die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige mit Zusatzzahl 6-mal größer sein als für 6 Richtige.



Vereinfachter Wahrscheinlichkeitsbaum für Lotto. Züge beginnen bei A und schreiten nach rechts fort. Richtige Zahlen bleiben auf der Ebene, falsche Zahlen rutschen eine Ebene tiefer. Das Ergebnis nach 6 Zügen steht rechts. Betrachten Sie als Züge nicht die Ziehung der Lottozahlen, da dort mehr als 6 Zahlen gezogen werden, sondern nehmen Sie für Züge die Zahlen, die Sie auf dem Lottoschein ankreuzen.

10 Spielabbruchproblem

a)



Anteil A = $0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$

Anteil B = $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

b) Fermats Methode basiert darauf, dass alle durchgespielten Möglichkeiten die gleichen Wahrscheinlichkeit $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ haben und damit vergleichbar sind. Seine Methode war also korrekt.

Aber man kann das (Gedanken-)Spiel tatsächlich abbrechen, wenn A den 8. Wurf und damit das ganze Spiel gewonnen hat. Nur haben Fermats Kritiker nicht bedacht, dass dieser Fall mit einer anderen Wahrscheinlichkeit eingerechnet werden muss. Mit dem Wahrscheinlichkeitsbaum, der damals noch nicht verwendet wurde, ergibt sich der Anteil von A dann wie folgt:

Anteil A = $0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$

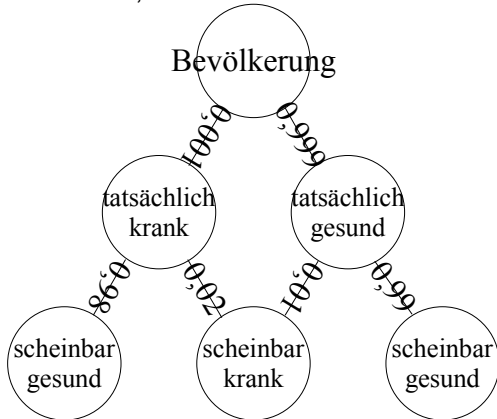
c) Beim Stande von 3:2 werden noch $n=4$ Münzen geworfen. Die Einzelwahrscheinlichkeit für eine Seite ist $p=0,5$, und da sie immer gleich ist, handelt es sich um eine Binomialfunktion. A gewinnt, wenn höchstens 2-mal die Münze für B fällt (untere Summenwahrscheinlichkeit. Mit einer Tabellenkalkulation erhält man das Ergebnis:

$P(A \text{ gewinnt}) = \text{BinomVert}(x \leq 2, n=4; p=0,5; 1) = 68,75\% = 11/16 = \text{Anteil A}$

Für Profis

11 Das 1. Teilerperiment des W-Baumes ist die Einteilung in tatsächlich Kranke und Gesunde. Dieses Teilerperiment findet nur gedanklich statt, denn es ist ja nicht bekannt, wer krank oder gesund ist. Bei dem Gedankenexperiment geht es auch nur um die Mengen der tatsächlich Kranken / Gesunden. Im 2. Teilerperiment wird untersucht, wie viele gesunde Personen (fälschlicherweise) als krank eingestuft werden.

Wer Probleme hat, mit Anteilen zu denken, kann für die Bevölkerung auch eine große Zahl setzen, z.B. eine Million, und damit rechnen.



Es ist nicht gefragt, wie viel Prozent aller Personen fälschlicherweise als krank eingestuft wurden, sondern nur, wie viel Prozent es aus der Gruppe der

(falsch und richtig) als krank eingestuft. Deshalb muss man noch wissen, wie viele kranke Personen (zu Recht) als krank eingestuft werden.

Zuletzt wird die Gruppe der als krank Eingestuften ($0,001 \cdot 0,02 + 0,999 \cdot 0,01 = 0,01001$) zu 100% gesetzt und die „falschen“ Kranken, tatsächlich Gesunden ($0,999 \cdot 0,01 = 0,00999$) entsprechend umgerechnet. Dies kann auch mit dem Dreisatz geschehen.

a)
$$P = \frac{0,999 \cdot 0,01}{0,001 \cdot 0,02 + 0,999 \cdot 0,01} = 0,998002$$

Eine Person, die unter diesen Umständen das Testergebnis „krank“ erhalten hat, kann noch ziemlich entspannt bleiben, denn seine Hoffnung beträgt 99,8%. Aus diesem Grunde muss jeder Test mehrfach erfolgen, am besten mit verschiedenen Testverfahren.

b)
$$P = \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,1 \cdot 0,02 + 0,9 \cdot 0,01} = 0,818$$

In Bevölkerungsgruppen mit hoher Durchseuchung ist Entspannung nach einem positiven Ergebnis also nicht mehr angebracht.

12 Die Teilerperimente entsprechen den Würfeln mit einer Wahrscheinlichkeit von je 1/6 für das richtige Feld. Dies ergibt 0,46% für 3 Richtige, 6,94% für 2 Richtige, 34,72% für 1 Richtige und 57,87% für keinen Richtigen.

Zur Bewertung der Spielsituation ist dies noch nicht ausreichend, sondern man muss den sogenannten Erwartungswert berechnen, der in diesem Fall angibt, wie viel Geld der Spieler im Schnitt zurück bekommt. Dazu wird die Wahrscheinlichkeit für 3 Richtige 0,46% mit ihrem Gewinnwert 4€ multipliziert. Wenn man dies mit allen Gewinnwerten tut und die Ergebnisse addiert, erhält man den Erwartungswert. Wenn der Erwartungswert kleiner als der Einsatz ist, verlieren die Spieler auf Dauer.

Lsg: für jeden Euro Einsatz erhält der Spieler $4 \text{ €} \cdot 0,0046 + 3 \text{ €} \cdot 0,0694 + 2 \text{ €} \cdot 0,3472 = 0,921 \text{ €} = 92,1 \text{ Cent}$

13 Das Ziegenproblem

Lösung: Mit der Taktik „Tor beibehalten“ gewinnt man mit der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit von 1/3 das Auto. „Tor wechseln“ gewinnt das Auto in den anderen beiden von 3 Fällen!

Begründung: In 1 von 3 Fällen trifft man mit der ersten Wahl das Auto und in 2 von 3 Fällen eine Ziege.

Mit 2/3 Wahrscheinlichkeit liegt man im ersten Zug also falsch, aber von da an wird es eindeutig. Der Moderator öffnet ein Tor mit einer Ziege und das Auto steht hinter dem dritten Tor – in 2/3 aller Fälle, also sollte man wechseln.

Nur wenn man im ersten Zug das Auto erwischt hat (1/3), verliert man durch Wechseln.

Veranschaulichung: Bei der Spielvariante mit 100 Toren und nur einem Auto wählt der Kandidat Tor 23. Anschließend öffnet der Moderator alle Tore außer den Nummern bis 23 und 38.

Würden Sie bei Tor 23 bleiben?

Wer's nicht blickt sei getröstet damit, dass sich über diese Aufgabe schon Professoren gestritten haben.

Fortgeschrittenübungen

- 1 Berliner Roulette
Beim Berliner Roulette beißen 2 Personen abwechselnd in insgesamt 6 Berliner Krapfen, von denen nur einer mit Senf gefüllt ist.
Wer ihn erwischt, hat verloren.
 - a) Ein Mitspieler überlegt, ob der erste oder zweite Spieler im Vorteil ist. Prüfen Sie dies mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsbaumes.
- 2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten
 - a) Nehmen Sie 2 rote und 2 schwarze Karten aus einem Kartenspiel, mischen Sie sie und legen sie verdeckt aus. Wählen Sie dann zufällig 2 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählten Karten die gleiche Farbe haben?
Nach Ian Stewart: Kopfzerbrecher – 30 Mathematische Rätsel, Piper München Zürich 2009
 - b) Ein Mensch erzählt ihnen ohne weitere Informationen, dass er 2 Kinder habe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Kinder gleichen Geschlechtes sind?
 - c) Erklären Sie den Unterschied.
 - d) Der Mensch informiert sie nun, dass unter seinen beiden Kindern mindestens ein Junge sei? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein zweites Kind auch ein Junge ist?
Nach [Deviin 2008] S. 166ff
 - e) Danach präzisiert der Mensch, dass sein älteres Kind ein Junge sei? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sein zweites Kind auch ein Junge ist?
- 3 Geburtstagsproblem
 - a) Zwei Menschen treffen sich auf der Straße. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie am gleichen Tag Geburtstag feiern können?
 - b) Drei Menschen treffen sich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei am gleichen Tag Geburtstag feiern können?
 - c) ..
 - d) Wie viele Menschen müssen versammelt sein, so dass die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Geburtstages über 50% liegt?
 - e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in Ihrer Klasse, dass keine 2 Klassenmitglieder an einem Tag Geburtstag haben.
- 4 DNA-Test
Bei einem Gentest wird nicht die ganze DNA, sondern nur 13 kurze Abschnitte verglichen, die jeweils zu etwa 10% mit dem gleichen Abschnitt eines anderen, nicht verwandten Menschen übereinstimmen.
 - a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die DNA-Tests von 2 beliebigen, nicht verwandten Menschen übereinstimmen?
 - b) Bei einem Kriminalfilm werden Täter systematisch mit DNA-Tests gesucht. Wie viele Untersuchungen sind nötig, bis ein Mensch mit der gleichen DNA wie die des Täters gefunden wird?

5 Hardware-Redundanz [1 S.24]

Nach Gero von Randow: Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten

Das Prinzip der Redundanz (mehrfach vorhandene Systeme) wird in der Technik und auch in der Natur häufig angewandt, um Ausfälle eines Systemes kompensieren zu können und damit die Gesamtausfallsicherheit z.B. von Flugzeugen und Kraftwerken zu erhöhen.

- a) Ein Fallschirm öffne mit $p = 0,999$, der Reserveschirm ebenso. Wie groß ist das Risiko für einen Fallschirmspringer, dass keiner der beiden Schirme aufgeht?¹⁴
- b) Beurteilen Sie das Risiko des Springers, nachdem der Hauptschirm wegen eines Packfehlers nicht geöffnet hat?¹⁵
(Die Versagensquote $P = 0,001$ für den Reserveschirm gilt ohne Vorkenntnisse. In diesem Fall ist aber bekannt, dass ein systematischer Fehler vorliegt. Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit gefragt, ob der systematische Fehler oder ein anderer auch beim Reserveschirm zuschlägt. Verallgemeinert kann man sagen, dass das Risiko redundanter Systeme größer ist als das Produkt der Einzelrisiken, weil Fehler oft systematisch auftreten. Dies Problem fand die NASA sogar bei getrennt programmierter Software, weil Programmierer zu typischen Fehlern neigen.)
- c) Beurteilen Sie das Risiko eines Springers, der bei seinem 5000. Sprung eine Flasche Champagner statt seines Reserveschirmes eingepackt hat (nach einem wahren Fall ;-)?¹⁶
- d) Bei AKW gibt es bestimmte Sicherheitsventile mehrfach. Es ist ein Fall dokumentiert, dass, obwohl alle Sicherheitsventile defekt oder in Wartung waren und deshalb die Automatik den Start blockierte, das System im Handbetrieb hochgefahren wurde und dabei die zulässigen Drücke überschritten wurden, mit der Begründung, dass die Leitungen ja Reserve hätten :-((
- e) Beispiel für jedermann: Bei Spurwechseln im Verkehr gibt es mehrere Sicherheitssysteme: ständige Verkehrsbeobachtung vorher (wissen, dass frei ist); blinken (Verkehr warnen), umschaun (Kontrolle, ob frei ist), langsames Spurwechseln (Mitverkehr hat Gelegenheit zur Reaktion). Wie viele der System wenden Sie an, wenn Sie lange Zeit in einer langen Schlange hinter einem langsamen Fahrzeug fahren und endlich eine kurze Gelegenheit zum Überholen sehen?

14 $P = 0,001 \cdot 0,001 = 1/100000$

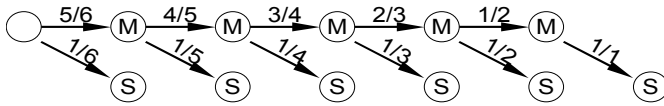
15 $P > 0,001$

16 $P = 0,001$

Fortgeschrittenübungen Lösungen

1 Berliner Roulette

Spieler: 1 2 1 2 1 2



Man kann das Spiel in 6 Züge teilen, die abwechselnd von Spieler 1 und Spieler 2 gespielt werden. Im ersten Zug hat Spieler 1 die Wahrscheinlichkeit $1/6$, in Senf zu beißen, dann hat er verloren und das Spiel ist zuende. Trifft er auf Marmelade, kann er den Berliner verspeisen, während Spieler 2 am Biss ist. Für den 2. Zug haben sich die Wahrscheinlichkeiten geändert, da ein Berliner aus dem Spiel ist.

Die Verlustwahrscheinlichkeiten für beide Spieler kann man nach den üblichen Regeln berechnen, die Ergebnisse mit ein bisschen Kürzen ohne Taschenrechner ausrechnen:

a)

$$P(\text{Sp.1 verliert}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P(\text{Sp.2 verl.}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = 0,5$$

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

a) Kartenpaare

Rechts der vollständige W- Baum beim Kartenziehen. Wahl: 1 2

Beim 1. Zug hat man 2 Möglichkeiten, eine rote, und 2 Möglichkeiten, eine schwarze Karte zu wählen. Jede Möglichkeit ist gleich wahrscheinlich mit 25%.

Im 2. Zug gibt es nur noch 3 Möglichkeiten, nämlich 1 Möglichkeit, die gleiche Farbe zu ziehen, und 2 Möglichkeiten, die andere Farbe zu ziehen.

Die Wahrscheinlichkeit, ein Paar gleicher Farbe zu ziehen, ist also $1/3$, während die Wahrscheinlichkeit für ein ungleiches Paar $2/3$ beträgt.

b) Es gibt 4 gleich wahrscheinliche Möglichkeiten: M-M; M-J; J-M, J-J.

Je zwei der Möglichkeiten sind gleich bzw. verschieden geschlechtlich, also beträgt die Wahrscheinlichkeit für gleiches Geschlecht 50%.

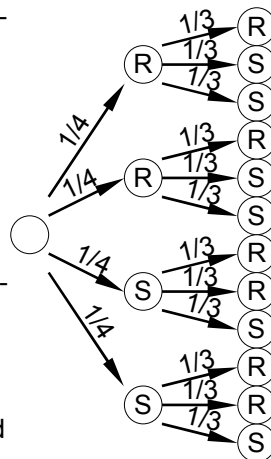
c) Der Unterschied ist, dass die Karten-Aufgabe ein hypergeometrisches Problem darstellt, während Kinder binomial verteilt sind.

Der Unterschied wird vielleicht deutlich, wenn man die Aufgabe auf 3 Karten / Kinder erweitert:

3 Karten können nicht gleichfarbig sein, weil nur je 2 gleiche Karten vorliegen, während 3 Kinder durchaus das gleiche Geschlecht haben können.

d) Mit der Zusatzinformation „mindestens ein Junge entfällt eine der in b) genannten Möglichkeiten, nämlich M-M. Es gibt also nur noch 3 gleich wahrscheinliche Konstellationen: M-J; J-M; J-J.

In 2 von diesen 3 Konstellationen ist das zweite Kind ein Mädchen, also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das zweite Kind auch ein Junge ist, „nur“ $1/3 = 33\%$



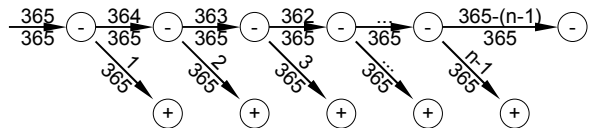
e) Jetzt bleiben nur noch 2 gleich wahrscheinliche Konstellationen: J-M; J-J und die Wahrscheinlichkeit für den 2. Jungen liegt wieder bei 50%.

3 Geburtstagsproblem

Wie üblich, vereinfacht man das Problem, indem man Schalttage weglässt und annimmt, dass Geburtstage gleichmäßig über das Jahr verteilt sind. In der Praxis stimmt das nicht, da Tiere bevorzugt in nahrungsmittelreichen Jahreszeiten gebären, also im Frühling. Menschen sind keine Tiere? Dann überschlagen Sie kurz, welchen Geburtstermin ein „Bett im Kornfeld ergibt ... ;-)

Wie üblich hilft es, einen W-Baum aufzustellen: Geburtstagsproblem

Spieler: 1 2 3 4 ... n



Als Ereignisse werden hier die Menschen / Spieler betrachtet, die nacheinander hinzustoßen, und dann die Möglichkeit haben, mit einem bereits Anwesenden am gleichen Tag Geburtstag zu haben (+) oder eben nicht (-).

Spieler 1 hat keine Möglichkeit für (+), bzw. die Sicherheit für (-).

$$P(1-) = \frac{365}{365} = 100\%$$

Der 1. Spieler könnte man in der Betrachtung auch weglassen, aber wenn man $365/365$ mitnimmt, wird später die Formel einfacher.

a) Der 2. Spieler hat 1 von 365 Möglichkeiten, mit dem 1. Spieler gemeinsam Geburtstag zu haben.

$$P(2+) = \frac{1}{365}$$

Man kann das Pferd auch von hinten aufzäumen:

$$P(2+) = 1 - P(2-) = 1 - \frac{364}{365}$$

b) Spätestens ab dem 3. Spieler wird die Methode „von hinten“ einfacher:

$$P(3+) = 1 - P(3-) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = 0,8\%$$

c) Einen noch für 4 Spieler:

$$P(3+) = 1 - P(3-) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} = 1,6\%$$

d) Für n Spieler lautet die Formel (mit $365/365$):

$$P(n+) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}$$

$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot \dots \cdot [365-(n-1)]}{365^n}$$

Ab 23 Schülern liegt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schüler an einem Tag Geburtstag haben, schon über 50%:

$$P(23+) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}} = 50,8\%$$

Die Schreibweise aus der Formelsammlung

$$P(n+) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

nützt nichts, weil die meisten Taschenrechner wohl $n!$ (n -Fakultät) können, aber bei so großen Zahlen die Zusammenarbeit verweigern.

4 DNA-Test

- a) 13 Abschnitte á 10 % bedeutet, dass es $10^{13} = 10$ Billionen = 10 Tera Menschen geben kann, deren DNA-Tests nicht identisch sind.
- b) Tatsächlich gilt auch für DNA-Tests das Geburts-
tagsproblem. Theoretisch können sich 365
Menschen ohne einen doppelten Geburtstag
versammeln, aber schon ab 23 Menschen wird es
unwahrscheinlich.
Eim DNA-Test sind die Zahlen größer. Für das alte
Testverfahren mit 8 Abschnitten war schon bei
einer mittleren Stadt von 65000 Menschen eine
Übereinstimmung mit 5% wahrscheinlich ([Devlin
2008] S.170). Dabei ist noch gar nicht
berücksichtigt

- dass bei regionaler Nähe auch verwandschaft-
liche Beziehungen möglich sind, die Überein-
stimmungen wesentlich begünstigen.
- dass Tests auch Fehler machen (siehe Aufg.
11, Hepatitis-Testverfahren). 2009 wurden in
mehreren 100 Kriminalfällen ein identischer
Täter vermutet, weil die Probestäbchen für
DNA-Tests beim Hersteller verunreinigt wurden.
Deshalb wurde die Anzahl der Abschnitte von 8 auf
13 erhöht, aber bei aktuellen Datenbanken von
Millionen Menschen sind auch hier zufällige Übe-
ereinstimmungen möglich. Ein DNA-Test ist deshalb
als alleiniger Beweis niemals ausreichend.
Nach [SdW] 7/97 S.8 „Der Trugschluss des Anklägers“ von Ian Steward