A Aufgaben

1 Zum Einstieg

1.1 Ein Kraftwerk produziert an einem Tag durchschnittlich 900 MW elektrische Leistung. Wie viel elektrische Leistung liefert es in einer Minute?

2 HP 2003/04-3 Dampfkraftwerk

2.1 Das Kraftwerk gibt bei η_{Gesamt} = 28,3% eine Leistung von P_{ab} = 500 MW ab. Berechnen Sie den täglichen Bedarf an Steinkohle. (2,0)

3 HP 2002/03-4 Ottomotor

Der Motor treibt eine Wasserpumpe an, die einen Hochbehälter füllt.

Abgegebene Motorleistung:	$P_M = 8$ kW
Förderhöhe:	$h = 15$ m
Pumpenwirkungsgrad:	$\eta_P = 0{,}7$
Wirkungsgrad der Leitungen:	$\eta_L = 0{,}9$

3.1 Berechnen Sie das maximal mögliche Fördervolumen pro Minute . (4,0)

3.2 Der Behälter fasst ein Volumen von V_H = 10 m³. Berechnen Sie die Füllzeit. (1,0)

4 HP 2001/02-4 Versorgung einer Stadt

Die Stadtwerke einer süddeutschen Kleinstadt mit 22000 Einwohnern und meist kleineren Gewerbebetrieben verkaufen insgesamt jährlich 74 Mio kWh elektrische Energie. Sie betreiben auch ein erdgasbetriebenes Blockheizkraftwerk (BHKW) und eine Photovoltaikanlage.

4.1 Wie viele Liter Öl müssten insgesamt und je Einwohner verbrannt werden, wenn die gesamte verkaufte Energiemenge in einem ölbefeuerten Großkraftwerk erzeugt würde?
Der Wirkungsgrad des Kraftwerks betrage 33 %, die Transportverluste 4 % sowie der Eigenbedarf 2 %. Der Heizwert für das Öl beträgt 37 MJ/kg, seine Dichte 0,9 kg/dm³. (3,5)

4.2 Die Photovoltaikanlage hat eine wirksame Fläche von 300 m². Die Sonne scheint durchschnittlich 1100 Stunden pro Jahr mit einer Strahlungsleistung von 1000 W/m². Der Gesamtwirkungsgrad der Anlage beträgt 11 %. Wie viel Prozent trägt die Photovoltaikanlage zur gesamten verbrauchten Energiemenge bei ? (2,5)

5 HP 2008/09-2 Aluminiumerzeugung

Zur Erzeugung von 1 kg Aluminium werden 15 kWh elektrischer Energie benötigt.

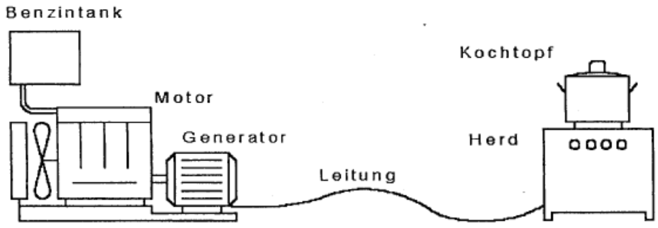
5.1 Wie viel Aluminium kann jährlich mit der Leistung des Laufwasserkraftwerkes erzeugt werden? (2,0)

Turbinendurchsatz:	$\dot{V}$	=	$100\,\frac{m^3}{s}$
Mittlere Fallhöhe des Wassers:	h	=	5 m
Wirkungsgrad des Kraftwerks	η_{LWK}	=	0,92

5.2 Welche Masse an Steinkohle wird je Tonne Aluminium benötigt, wenn das Steinkohlekraftwerk einen Wirkungsgrad von η_{SKK} = 0,38 hat? (2,0)

6 HP 2000/01-4 Stromerzeuger

Ein Verein plant ein Fest in einer Waldhütte ohne Anschluss an die öffentliche Stromversorgung. Die Energie für den Elektroherd und andere Verbraucher liefert ein Stromerzeuger. Dieser besteht aus einem Verbrennungsmotor, der einen Generator antreibt.



Daten:

Motorwirkungsgrad	η_M = 35 %
Generatorwirkungsgrad	η_g = 95 %
Verluste in der Leitung:	5 %
Abwärmeverluste beim Kochen:	20 %
Maximale Motorleistung	P_M = 5 kW
Anschlussleistung aller Herdplatten	P_E = 3,5 kW

6.1 Wie hoch ist der Benzinverbrauch in Liter je Stunde bei maximaler Leistung? (Dichte ρ = 0,73 kg/dm³; Heizwert: H = 43 MJ/kg) (3,0 P)

6.2 In der Hütte soll auf allen Elektroherdplatten in Kochtöpfen Wasser für Maultaschen erhitzt werden. Welche Zeit in Minuten wird benötigt, um 30 Liter Wasser bei höchster Heizstufe aller Kochplatten von 20℃ auf 100℃ zu erhitzen? (3,0 P)

7 HP 1999/00-3 Wärmekraftwerk

7.1 Wie viele Tonnen Steinkohle müssen in 24 h verbrannt werden, wenn die abgegebene elektrische Leistung 300 MW beträgt? (1 kgSKE = 29,3MJ)
In der vorherigen Teilaufgabe konnte der Wirkungsgrad η_{ges} = 0,281 errechnet werden. (2,5 P)

7.2 Welches Kühlwasservolumen muss den Kondensator in einer Sekunde durchfließen, wenn das einem Fluss entnommene Wasser sich maximal um 3℃ erwärmen darf und die abgeführte Wärmemenge 600 MJ/s beträgt?
(c_{H20} = 4,18 kJ/kgK) (2,0 P)

8 HP 2007/08-1 Brennholzspalter

Der Holzspalter wird durch einen Viertakt-Ottomotor angetrieben. Folgende Daten sind bekannt:

Volumen	V_1	=	125 cm3
Umgebungstemperatur	ϑ_1	=	20 ℃
Druck der angesaugten Luft	p_1	=	1 bar
Temperatur	ϑ_3	=	2000 ℃
Drehzahl	n	=	2500 1/min

8.1 Ermitteln Sie die zugeführte Wärmemenge Q_{23} und den Kraftstoffverbrauch des Motors in Liter pro Stunde, wenn der Motor mit der angegebenen Drehzahl läuft und ϑ_2 = 360℃ angenommen wird. (2,0)

9 Sie denken daran, ein Elektroauto anzuschaffen. Vergleichen Sie die Kosten von elektrischem Strom und Benzin bezüglich ihrer Energieinhalte.

B Lösungsvorschläge

1 Gegenfragen:

1.1 Ein Auto leistet am Tag 70 PS. Wie viel leistet es in einer Minute?

1.2 In einem Fluss strömen im Tagesdurchschnitt 1 m³ je Sekunde. Wie viele m³ je Sekunde fließen in in einer Stunde?

2 HP 2003/04-3 Dampfkraftwerk

2.1 Für die Aufgabe wird der Heizwert von Steinkohle benötigt. Man findet ihn im Tabellenbuch unter dem Stichwort „Heizwert" H_u oder in der Formelsammlung Energietechnik als Steinkohleeinheit SKE. Letztere wird verwendet, um den Energieinhalt von Kohle verschiedener Herkunft und anderer Primärenergieträger zu vergleichen und ist der Heizwert einer bestimmten Steinkohlesorte bezogen auf ein Kilogramm (kgSKE) oder eine Tonne (tSKE).

Lösungsmöglichkeit 1: kompakte Formel

Die zugeführte Leistung

$$P_{zu}=\frac{P_{ab}}{\eta_{ges}}=\frac{500\,MW}{0{,}283}=1767\,MW \quad .$$

ist Energie pro Zeit (Energiestrom) $P_{zu}=\frac{W_{zu}}{t}$ und entspricht dem Wärmestrom $\dot{Q}_{zu}=\frac{Q_{zu}}{t}$, der mit Heizwert H_u in der Formel $Q=H_u\cdot m$ in Massenstrom $\dot{m}_{Kohle}=\frac{m_{Kohle}}{t}$ umgerechnet werden kann:

$$\frac{P_{ab}}{\eta_{ges}}=P_{zu}=\frac{W_{zu}}{t}=\frac{Q_{zu}}{t}=\frac{m\cdot H_u}{t} \quad \rightarrow \quad m=\frac{P_{ab}\cdot t}{\eta_{ges}\cdot H_u}$$

Den Tagesbedarf erhält man mit t = 24 Stunden:

$$m_{Steinkohle}=\frac{P_{ab}\cdot t}{\eta\cdot H_u}=\frac{500\,MW\cdot 24h}{0{,}283\cdot 30\,MJ/kg}=5087\,t$$

Lösungsmöglichkeit 2

Leistung ist Energiemenge pro Zeiteinheit. Wer Probleme mit dem Begriff Leistung hat, kann stattdessen mit der Energie rechnen, die innerhalb des geforderten Zeitraumes anfällt, in diesem Fall 1 Tag. Diesen Lösungsweg sollte man deutlich machen:

„Alle Berechnungen sind auf einen Tag bezogen:"

$$W_{ab}=P_{ab}\cdot 1\,Tag=500\,MW\cdot 24\,h=12000\,MWh$$
$$=12000\,MW\cdot 3600\,s=43{,}2\cdot 10^{12}\,J$$

ist die elektrische Energie, die das Kraftwerk pro Tag abgibt. Da die Erzeugung der elektrischen Energie aus Wärme nicht verlustfrei geschieht, muss die benötigte Wärmemenge ermittelt werden:

$$\eta_{ges}=\frac{W_{ab}}{Q_{zu}}\rightarrow Q_{zu}=\frac{W_{ab}}{\eta_{ges}}=\frac{43{,}2\cdot 10^{12}\,J}{0{,}283}=152{,}6\cdot 10^{12}\,J$$

ist die Wärmeenergie, die pro Tag ins Kraftwerk gesteckt werden muss. Der Heizwert H_u sagt aus, welche Masse Kohle dafür benötigt wird:

$$H_u=\frac{Q_{zu}}{m} \quad \rightarrow \quad m_{Sk}=\frac{Q_{zu}}{H_{uSk}}=\frac{152{,}6\cdot 10^{12}\,J}{\frac{30\,MJ}{kg}}=5087\,t$$

oder mit der Steinkohleeinheit SKE statt H_u

$$m_{Sk}=\frac{Q_{zu}}{SKE}=\frac{152{,}6\cdot 10^{12}\,J}{\frac{2{,}93\cdot 10^{10}\,J}{t}}=5207\,t$$

erhält man den Tagesbedarf von Steinkohle für dieses Kraftwerk.

Lösungsmöglichkeit 3: Dreisätze

Die Aufgabe kann mit einer Reihe von Dreisätzen gelöst werden (Ich sehe schon die Stirn runzelnden Kollegen :-):

Leistung P_{ab} = 500 MW bedeutet:
Das Kraftwerk liefert 500 MJ elektrische Energie in 1 Sekunde.
Wie viel elektr. Energie liefert es an einem Tag?

$$500\,MJ \;\Leftrightarrow\; 1\,Sekunde$$
$$x\,? \;\Leftrightarrow\; 1\,Tag$$
$$x=500\,MJ\cdot\frac{1\,Tag}{1s}=500\,MJ\cdot\frac{24\cdot 3600s}{1s}=43{,}2\cdot 10^6\,MJ$$

Wirkungsgrad η_{ges} = 0,283 bedeutet:
Das Kraftwerk wandelt 1 MJ Wärmeenergie in 0,283 MJ elektrische Energie um.
Wie viel Wärmeenergie benötigt es für $43{,}2\cdot 10^6$ MJ?

$$1\,MJ \;\Leftrightarrow\; 0{,}283\,MJ$$
$$x\,? \;\Leftrightarrow\; 43{,}2\cdot 10^6\,MJ$$
$$x=1\,MJ\cdot\frac{43{,}2\cdot 10^6\,MJ}{0{,}283\,MJ}=152{,}65\cdot 10^6\,MJ$$

Heizwert H_u = 30 MJ/kg bedeutet:
1 kg Steinkohle liefert 30 MJ Wärmeenergie.
Wie viel Steinkohle wird für $152{,}6\cdot 10^6$ MJ Wärmeenergie benötigt?

$$1\,kg \;\Leftrightarrow\; 30\,MJ$$
$$x\,? \;\Leftrightarrow\; 152{,}65\cdot 10^6\,MJ$$
$$x=1\,kg\cdot\frac{152{,}65\cdot 10^6\,MJ}{30\,MJ}=5{,}1\cdot 10^6\,kg=5100\,t$$

oder:

Steinkohleeinheit tSKE = $2{,}93\cdot 10^{10}$ J bedeutet:
1 t Steinkohle liefert $2{,}93\cdot 10^{10}$J Wärmeenergie.
Wie viel Steinkohle wird für $152{,}6\cdot 10^6$ MJ Wärmeenergie benötigt?

$$1\,t \;\Leftrightarrow\; 2{,}93\cdot 10^{10}\,J$$
$$x\,? \;\Leftrightarrow\; 152{,}65\cdot 10^6\,MJ$$
$$x=1\,t\cdot\frac{152{,}65\cdot 10^6\,MJ}{2{,}93\cdot 10^{10}\,J}=5{,}2\cdot 10^3\,t=5200\,t$$

Die letzten Werte sind der Tagesbedarf an Steinkohle für das Kraftwerk in der Aufgabe.

Die unterschiedlichen Ergebnisse entstehen wegen der unterschiedlichen Tabellenwerte für den Heizwert von Steinkohle.

3 HP 2002/03-4 Ottomotor

3.1 Im Folgenden ist die Erdbeschleunigung g nur wegen des hohen Wiedererkennungswertes mit $g = 9{,}81\ m/s^2$ eingesetzt. Für praktische Berechnungen genügt in der Regel $g = 10\ m/s^2$.

Lösungsmöglichkeit 1: kompakte Formel

Die Leistung an der Pumpe

$$P_P = P_M \cdot \eta_P \cdot \eta_L = 8\,kW \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 5{,}04\,kW$$

ist Energie pro Zeit bzw. Arbeit pro Zeit $P_P = \frac{W_P}{t}$.

Die Pumpe verrichtet Arbeit, indem sie die Gewichtskraft von Wasser auf die Förderhöhe h pumpt, also Arbeit = Kraft x Weg bzw. $W = F_{GH2O} \cdot h$. Die Kraft entsteht durch die Wirkung der Erdbeschleunigung[1] g auf die Masse des Wassers $F_{GH2O} = m_{H2O} \cdot g$. Mit seiner Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ rechnet man die Masse des Wassers in das entsprechende Volumen um. Solange Masse und Volumen auf die Zeit bezogen sind, kann man sie analog zur Leistung (=Energiestrom) $P = \frac{W}{t}$ als Massenstrom $\dot{m} = \frac{m}{t}$ bzw. Volumenstrom $\dot{V} = \frac{V}{t}$ betrachten.

Nach diesen Überlegungen kann man eine Formel für die Pumpenleistung aufstellen:

$$P_M \cdot \eta_P \cdot \eta_L = P_P = \frac{W_P}{t} = \frac{F}{t} \cdot h = \frac{m}{t} \cdot g \cdot h = \frac{V}{t} \cdot \rho \cdot g \cdot h$$

$$\rightarrow \quad V_{H2O} = \frac{P_M \cdot \eta_P \cdot \eta_L \cdot t}{\rho_{H2O} \cdot g \cdot h}$$

Das Fördervolumen pro Minute erhält man mit t = 1 Minute.

$$V_{H2O} = \frac{P_M \cdot \eta_P \cdot \eta_L \cdot t}{\rho_{H2O} \cdot g \cdot h} = \frac{8\,kW \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 1\,min}{1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 15\,m} = 2055\,l \approx 2\,m^3$$

Nicht notwendig, aber eleganter ist die Angabe des Volumenstromes, bezogen auf 1 Minute.

$$\dot{V} = \frac{V_{H2O}}{t} = \frac{P_M \cdot \eta_P \cdot \eta_L}{\rho_{H2O} \cdot g \cdot h} = \frac{8\,kW \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9}{1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 15\,m} \approx 2\,\frac{m^3}{min}$$

Lösungsmöglichkeit 2

Wer mit Leistung und Massen- und Volumenströmen Probleme hat, kann seine Rechnung von vornherein auf den geforderten Zeitraum 1 Minute beziehen, und dann mit Arbeit, Masse und Volumen rechnen. Den Lösungsweg muss man deutlich machen:

„Alle Berechnungen sind auf eine Minute bezogen."

$$W_M = P_M \cdot 1\,min = 8\,kW \cdot 60\,s = 480\,kJ$$

ist die mechanische Energie, die der Motor an die Pumpe pro Minute abgibt. Da die Pumpe nicht verlustfrei arbeitet, muss die von der Pumpe tatsächlich abgegebene Arbeit ermittelt werden[2]:

$$\eta_{ges} = \eta_P \cdot \eta_L = \frac{W_P}{W_M}$$

$$\rightarrow \quad W_P = W_M \cdot \eta_P \cdot \eta_L = 480\,kJ \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 302{,}4\,kJ$$

ist die Arbeit, die die Pumpe pro Minute verrichtet. Arbeit ist Kraft x Weg, der Weg die Förderhöhe h:

$$W_P = F \cdot s \;\rightarrow\; F_{GH2O} = \frac{W_p}{h} = \frac{302{,}4\,kJ}{15\,m} = 20{,}16\,kN$$

ist die Gewichtskraft des in 1 Minute angehobenen Wassers. Mit der Erdbeschleunigung ergibt es

$$F = m \cdot g \;\rightarrow\; m_{H2O} = \frac{F_{GH2O}}{g} = \frac{20160\,N}{9{,}81\,m/s^2} = 2055\,kg$$

die Masse des pro Minute angehobenen Wassers und mit der Dichte

$$\rho = \frac{m}{V} \;\rightarrow V_{H2O} = \frac{m_{H2O}}{\rho_{H2O}} = \frac{2055\,kg}{1\,\frac{kg}{dm^3}} = 2055\,dm^3 \approx 2\,m^3$$

das maximal mögliche Fördervolumen der Pumpe auf 15m pro Minute.

Lösungsmöglichkeit 3: Dreisätze

Wirkungsgrad $\eta_{ges} = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$ bedeutet:
Die Pumpe wandelt 1 kW Motorleistung in 0,63 kW Pumpenleistung um.
Wie viel Pumpenleistung erreicht sie mit 8 kW Motorleistung?

$$1\,kW \;\Leftrightarrow\; 0{,}63\,kW$$
$$8\,kW \;\Leftrightarrow\; x?$$

$$x = 0{,}63\,KW \cdot \frac{8\,kW}{1\,kW} = 5{,}04\,kW$$

Pumpenleistung 5,04 kW = 5,04 kJ/s bedeutet:
Die Pumpe verrichtet eine Arbeit von 5,04 kJ je Sekunde.
Wie viel Arbeit verrichtet sie in 1 Minute?

$$5{,}04\,kW \;\Leftrightarrow\; 1\,Sekunde$$
$$x? \;\Leftrightarrow\; 1\,Minute$$

$$x = 5{,}04\,kJ \cdot \frac{1\,Minute}{1\,s} = 5{,}04\,kJ \cdot \frac{60\,s}{1\,s} = 305{,}4\,kJ$$

1 Die Vorstellung von der Erde, die an anderen Massen ziehe, sei es durch unsichtbare Gravitationswellen oder geheimnisvolle Teilchen, ist natürlich vereinfacht für ebensolche Geister. Schön für Ingenieure ist, dass diese Vereinfachung für ihre Zwecke völlig ausreicht. Aber gebildete Menschen wissen natürlich, dass Massen nicht „ziehen", sondern eine Verformung der Raumzeit bewirken ;-)

2 Den Wirkungsgrad hätte man schon bei der Motorleistung einrechnen können.

Pumpenarbeit 1 J = 1 Nm bedeutet :
Mit 1 J hebt die Pumpe eine Kraft von 1 N um 1 m.
Wie viel hebt die Pumpe mit 305,4 kJ um 15 m?

$$1\,J \Leftrightarrow 1N\cdot 1m$$
$$305{,}4\,kJ \Leftrightarrow x\,?\cdot 15m$$
$$x = 1N\cdot\frac{305{,}4\,kJ}{1\,J}\cdot\frac{1m}{15m} = 20{,}16\,kN$$

Kraft (= Masse x Beschleunigung) 1N = 1 kgm/s² bedeutet :
Mit der Kraft 1 N kann eine Masse von 1 kg mit 1m/s² beschleunigt werden.
Welche Masse kann die Kraft 20,16 kN mit der Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s² beschleunigen?

$$1\,N \Leftrightarrow 1kg\cdot 1\frac{m}{s^2}$$
$$20{,}16kN \Leftrightarrow x\,?\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}$$
$$x = 1kg\cdot\frac{20{,}16\,kN}{1\,N}\cdot\frac{1\,m/s^2}{9{,}81\,m/s^2} = 2055kg$$

Die Dichte $\rho_{H2O} = 1\frac{kg}{dm^3}$ bedeutet:
1 kg Wasser hat ein Volumen von 1 dm³.
Wie viel Volumen haben 2055 kg Wasser.

$$1\,l \Leftrightarrow 1kg$$
$$x\,? \Leftrightarrow 2055\,kg$$
$$x = 1l\cdot\frac{2055\,kg}{1\,kg} = 2055\,l \approx 2\,m^3$$

Der letzte Wert ist das Fördervolumen der Pumpe pro Minute.

3.2 Lösungsmöglichkeit 1: kompakte Formel
Man kann die oben hergeleitete Formel nach der Zeit umstellen:

$$V_{H20} = \frac{P_M\cdot\eta_P\cdot\eta_L\cdot t}{\rho_{H20}\cdot g\cdot h} \quad\rightarrow\quad t = \frac{V_{H20}\cdot\rho_{H20}\cdot g\cdot h}{P_M\cdot\eta_P\cdot\eta_L}$$

und das Volumen V_H = 10 m³ einsetzen:

$$t = \frac{10m^3\cdot 1\frac{kg}{dm^3}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 15m}{8kW\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9}$$
$$= \frac{10\cdot 1000\cancel{dm^3}\cdot 1\frac{kg}{\cancel{dm^3}}\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 15\cancel{m}}{8000\frac{N\cancel{m}}{s}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9}$$
$$= 292s = 4{,}87\,min$$

Lösungsmöglichkeit 3: Dreisatz

Das Ergebnis der vorigen Teilaufgabe bedeutet:
In 1 Minute werden 2055 l Wasser in den Behälter gepumpt.
Wie viel Zeit wird für 10 m³ benötigt?

$$1\,min \Leftrightarrow 2055\,l$$
$$x\,? \Leftrightarrow 10\,m^3$$
$$x = 1\,min\cdot\frac{10\,m^3}{2055\,l} = 4{,}87\,min = 292\,s$$

4 HP 2001/02-4 Versorgung einer Stadt

4.1 $\eta_{ges} = \eta_1\cdot\eta_2\cdot\eta_3 = 33\%\cdot(1-4\%)\cdot(1-2\%)$

$$= 0{,}33\cdot 0{,}96\cdot 0{,}98 = 0{,}31$$
$$\eta_{ges} = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}} \rightarrow$$
$$Q_{zu} = \frac{W_{ab}}{\eta_{ges}} = \frac{74\cdot 10^6\,kWh}{0{,}31} = 238\cdot 10^6\,kWh$$
$$Q = m\cdot H_u \rightarrow m_{Öl} = \frac{Q_{zu}}{H_u} = \frac{238\cdot 10^6\,kWh}{37\frac{MJ}{kg}}$$
$$m_{Öl} = \frac{238\cdot 10^9\,W\cdot 3600\,s}{37\cdot 10^6\,J}kg = 23157\,t$$
$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow$$
$$V_{Öl} = \frac{m_{öl}}{\rho_{Öl}} = \frac{23{,}157\cdot 10^6\,kg}{0{,}9\frac{kg}{dm^3}} = 25{,}8\cdot 10^6\,dm^3$$
$$V_{Einw} = \frac{V_{Öl}}{n_{Einw}} = \frac{25{,}8\cdot 10^6\,dm^3}{22000}$$
$$= 1173\,l\,\text{Öl pro Einwohner und Jahr}$$

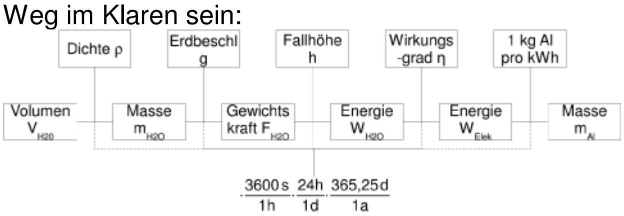
Der Ölverbrauch würde insgesamt 25,8 Mio. Liter und je Einwohner 1173 Liter betragen.

4.2 Um die Strahlungsintensität (= Strahlungsleistung pro Fläche) und Kollektorfläche in Strahlungsleistung umzurechnen, findet man wahrscheinlich keine Formel im Tabellenbuch. Da hilft nur ein bisschen Verstand und notfalls ein Dreisatz. Wenn man dann noch darauf achtet, dass die Einheiten aufgehen, kann eigentlich nichts mehr schief gehen:

$$P_{zu} = \text{Solarstrahlungsintensität}\cdot\text{Kollektorfläche}$$
$$= \frac{1000\,W}{m^2}\cdot 300\,m^2 = 300\,kW$$
$$W_{zu} = P_{zu}\cdot t = 300\,kW\cdot 1100\,h = 330\,MWh$$
$$W_{Solarstrom} = W_{zu}\cdot\eta = 330\,MWh\cdot 11\% = 36{,}3\,MWh$$
$$\text{Anteil} = \frac{W_{Solarstrom}}{W_{ges}} = \frac{36{,}3\,MWh}{74\cdot 10^6\,kWh} = 0{,}00049 = 0{,}049\%$$

5 HP 2008/09-2 Aluminiumerzeugung

5.1 Bevor man losrechnet, sollte man sich über den Weg im Klaren sein:



Lösungsmöglichkeit 1: kompakte Formeln

$$\dot{m}_{Al} = \dot{V}_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g \cdot h \cdot \eta_{LWK} \cdot \frac{1\,kg}{15\,kWh}$$

$$= 100\,\frac{m^3}{s} \cdot 1\,\frac{kg}{dm^3} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,m \cdot 0{,}92 \cdot \frac{1\,kg}{15\,kWh}$$

$$\dot{m}_{Al} = 300{,}8\,\frac{kg}{h} = 2637\,\frac{t}{Jahr}$$

Lösungsmöglichkeit 2a:

Eine elegante Rechnung verwendet die zeitbezogenen Größen $\dot{V}$ (Volumenstrom), $\dot{m}$ (Massenstrom) und P (Leistung = Energiestrom). ($\dot{F}$ ist nicht üblich.)

$$\dot{m}_{H_2O} = \dot{V}_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} = 100\,\frac{m^3}{s} \cdot 1\,\frac{kg}{dm^3} = 100 \cdot 10^3\,\frac{kg}{s}$$

$$P_{H_2O} = \dot{m}_{H_2O} \cdot g \cdot h = 100 \cdot 10^3\,\frac{kg}{s} \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,m = 4{,}905 \cdot 10^6\,W$$

$$P_{el} = \eta_{LWK} \cdot P_{H_2O} = 0{,}92 \cdot 4{,}905 \cdot 10^6\,W = 4{,}513 \cdot 10^6\,W$$

$$\dot{m}_{Al} = P_{el} \cdot \frac{1\,kg}{15\,kWh} = 4{,}513 \cdot 10^6\,W \cdot \frac{1\,kg}{15\,kWh} = 300{,}8\,\frac{kg}{h}$$

$$\dot{m}_{Al} = 300{,}8\,\frac{kg}{\cancel{h}} \cdot \frac{24\,\cancel{h}}{\cancel{Tag}} \cdot \frac{365{,}25\,\cancel{Tage}}{Jahr} = 2637\,\frac{t}{Jahr}$$

Lösungsmöglichkeit 2b:

Wer mit Strömen (=Größen pro Zeit) Probleme hat, kann die Zeit aus den Formeln herausnehmen (z.B. "Ich rechne für 1 Sekunde .."). Im Vorschlag stehen die Zeiträume im Index: Sekunde s, Stunde h (*lat.* hora), Tag d (*lat.* dies) und Jahr a (*lat.* annus).

$$m_{H_2O;1s} = V_{H_2O;1s} \cdot \rho_{H_2O} = 100\,m^3 \cdot 1\,\frac{kg}{dm^3} = 100 \cdot 10^3\,kg$$

$$F_{H_2O;1s} = m_{H_2O;1s} \cdot g = 100 \cdot 10^3\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} = 0{,}981 \cdot 10^6\,N$$

$$W_{H_2O;1s} = F_{H_2O;1s} \cdot h = 0{,}981 \cdot 10^6\,N \cdot 5\,m = 4{,}905 \cdot 10^6\,J$$

$$W_{H_2O;1h} = W_{H_2O;1s} \cdot 3600 = 4{,}905 \cdot 10^6\,J \cdot 3600$$

$$= 4{,}905 \cdot 10^6\,Wh = 4{,}905 \cdot 10^3\,kWh\,(= 17{,}66 \cdot 10^9\,J)$$

$$W_{H_2O;1a} = W_{H_2O;1h} \cdot 24 \cdot 365{,}25 = 4{,}905 \cdot 10^3\,kWh \cdot 8766$$

$$= 43{,}00 \cdot 10^6\,kWh\,(= 154{,}8 \cdot 10^{12}\,J)$$

$$W_{el;1a} = W_{H_2O;1\,Jahr} \cdot \eta_{LWK} = 43{,}00 \cdot 10^3\,kWh \cdot 0{,}92$$

$$= 39{,}56 \cdot 10^6\,kWh\,(= 142{,}4 \cdot 10^{12}\,J)$$

$$m_{Al;1a} = \frac{1\,kg}{15\,kWh} \cdot W_{el;1a} = \frac{1\,kg \cdot 39{,}56 \cdot 10^6\,kWh}{15\,kWh} = 2637\,t$$

Lösungsmöglichkeit 3: Dreisatz

5.2 Lösungsmöglichkeit 1: kompakte Formel

$$m_{Sk} = \frac{W_{1t\,Al}}{H_u \cdot \eta_{SKK}} = \frac{1000 \cdot 15\,kWh}{\frac{2{,}93 \cdot 10^{10}\,Ws}{t_{Sk}} \cdot \frac{1h}{3600\,s} \cdot 0{,}38}$$

$$= \frac{39{,}47\,MWh}{\frac{8{,}14\,MWh}{t_{Sk}}} = 4{,}85\,t_{Steinkohle\ je\ t\ Al}$$

Lösungsmöglichkeit 2

spezifischer Energiebedarf für die Elektrolyse von Al

$$w_{el} = \frac{15\,kWh}{kg_{Al}} = \frac{15\,kW \cdot 3600\,s}{kg_{Al}} = \frac{54\,MJ}{kg_{Al}}$$

$$q = \frac{w_{el}}{\eta_{SKK}} = \frac{15\,kWh/kg_{Al}}{0{,}38} = 39{,}47\,\frac{kWh}{kg_{Al}}$$

$$= 39{,}47\,\frac{kW \cdot 3600\,s}{kg_{Al}} = 142{,}1\,\frac{MJ}{kg_{Al}}$$

$$H_u = \frac{Q}{m_{Sk}} = \frac{q \cdot m_{Al}}{m_{Sk}} \rightarrow$$

$$\frac{m_{Sk}}{m_{Al}} = \frac{q}{H_u} = \frac{142{,}1\,MJ/kg_{Al}}{29{,}3\,MJ/kg_{Sk}} = 4{,}850\,\frac{kg_{Sk}}{kg_{Al}} = 4{,}850\,\frac{t_{Sk}}{t_{Al}}$$

Lösungsmöglichkeit 3: Dreisatz

6 HP 2000/01-4 Stromerzeuger

6.1 Alle Berechnungen sind auf 1 Stunde bezogen:

$$P_M = \frac{W_M}{t} \rightarrow W_M = P_M \cdot t = 5\,kW \cdot 1\,h = 5\,kWh$$

$$= 5\,kW \cdot 3600\,s = 18\,MJ$$

$$\eta_M = \frac{W_M}{Q_{zu}} \rightarrow Q_{zu} = \frac{W_M}{\eta} = \frac{18\,MJ}{35\%} = 51{,}4\,MJ$$

$$Q_{zu} = m \cdot H_u \rightarrow m = \frac{Q_{zu}}{H_u} = \frac{51{,}4\,MJ}{43\,\frac{MJ}{kg}} = 1{,}196\,kg$$

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{1{,}196\,kg}{0{,}73\,\frac{kg}{dm^3}} = 1{,}64\,l$$

Der Benzinverbrauch beträgt 1,64 l je Stunde.

6.2

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m_{H20} = V \cdot \rho = 30\,l \cdot 1\,\frac{kg}{dm^3} = 30\,kg$$

$$Q_{zu} = m \cdot \Delta T \cdot c = 30\,kg \cdot (100 - 20)\,°C \cdot 4{,}18\,\frac{kJ}{kgK}$$

$$= 10032\,kJ$$

$$\eta_{Koch} = \frac{P_{Koch}}{P_E} \rightarrow$$

$$P_{Koch} = P_E \cdot \eta_{Koch} = 3{,}5\,kW \cdot (1 - 20\,\%) = 2{,}8\,kW$$

$$P_{Koch} = \frac{Q_{zu}}{t} \rightarrow$$

$$t = \frac{Q_{zu}}{P_{Koch}} = \frac{10032\,kJ}{2{,}8\,kW} = 3583\,s = 59{,}7\,min$$

Man braucht fast eine Stunde, um das Wasser auf 100°C zu erhitzen.

7 HP 1999/00-3 Wärmekraftwerk

7.1 $\eta_{ges}=\frac{P_{ab}}{P_{zu}} \rightarrow P_{zu}=\frac{P_{ab}}{\eta_{ges}}=\frac{300\,MW}{0{,}281}=1068\,MW$

$P_{zu}=\frac{W_{zu}}{t} \rightarrow$

$W_{zu}=P_{zu}\cdot t=1068\,MW\cdot 24\,h=25623\,MWh$

$=92{,}24\cdot 10^6\,MJ=Q_{zu}$

$Q_{zu}=m\cdot H_u \rightarrow$

$m=\frac{Q_{Zu}}{H_u}=\frac{Q_{zu}}{SKE}=\frac{92{,}24\cdot 10^6 MJ}{29{,}3\,\frac{MJ}{kg}}=3148\,t$

Der Tagesbedarf des Kraftwerkes beträgt 3148 t Steinkohle.

7.2 Alle Berechnungen sind auf 1 Sekunde bezogen:

$P_{ab}=\frac{Q_{ab}}{t} \rightarrow Q_{ab}=P_{ab}\cdot t=600\,\frac{MJ}{s}\cdot 1\,s=600\,MJ$

$Q_{ab}=m\cdot \Delta T\cdot c \rightarrow$

$m=\frac{Q_{ab}}{\Delta T\cdot c}=\frac{600\,MJ}{3\,°C\cdot 4{,}18\,\frac{kJ}{kgK}}=47800\,kg$

$\rho=\frac{m}{V} \rightarrow V=\frac{m}{\rho}=\frac{47800\,kg}{1\,\frac{kg}{dm^3}}=47800\,l=47{,}8\,m^3$

Pro Sekunde werden 47,8 m³ Kühlwasser benötigt.

8 HP 2007/08-1 Brennholzspalter

8.1 Wärmebedarf je Takt

$p\cdot V=m\cdot R_i\cdot T \rightarrow$

$m_{Luft}=\frac{P_1\cdot V_1}{R_i\cdot T_1}=\frac{1\,bar\cdot 125\,cm^3}{0{,}287\,\frac{kJ}{kgK}\cdot(273+20)\,K}$

$m_{Luft}=\frac{10^5\,\frac{N}{m^2}\cdot 125\cdot 10^{-6}\,m^3}{0{,}287\,\frac{J}{g}\cdot 293}=0{,}149\,g$

$Q_{23}=c_v\cdot m_{Luft}\cdot \Delta T=c_v\cdot m_{Luft}\cdot(T_3-T_2)$

$Q_{23}=0{,}718\,\frac{kJ}{kgK}\cdot 0{,}149\,g\cdot(2273-633)\,K=175\,J$

Mit dem Heizwert H_u und der Dichte ρ von Benzin ergibt sich der Benzinbedarf je Takt:

$H_U=\frac{Q}{m} \rightarrow$

$m_{Benzin pro Takt}=\frac{Q_{23}}{H_U}=\frac{175\,J}{43\,MJ/kg}=4{,}07\,mg$

$\rho=\frac{m}{V} \rightarrow$

$V_{Benzin pro Takt}=\frac{m_{Benzin pro Takt}}{\rho}=\frac{4{,}07\,mg}{0{,}75\,kg/dm^3}=5{,}43\,mm^3$

Da ein 4-Takt-Motor nur bei jeder 2. Kurbelwellen-Umdrehung Kraftstoff verbrennt, finden n/2 = 1250/min Arbeitstakte pro Minute statt:

$\dot{V}_{Benzin}=V_{Benzin pro Takt}\cdot\frac{n}{2}$

$\dot{V}_{Benzin}=5{,}43\,mm^3\cdot\frac{2500}{2}\,\frac{Takte}{min}=6{,}78\,\frac{cm^3}{min}=0{,}41\,\frac{l}{h}$

Beachten Sie, dass die Werte für den Heizwert und die Dichte von Benzin nicht angegeben waren.

9 Benzin kostet 2008 ca. 1,50 € pro Liter.
Daraus kann man den Preis pro Energie ermitteln:

$\frac{Preis}{Energie}=\frac{Preis}{Volumen}\cdot\frac{Volumen}{Masse}\cdot\frac{Masse}{Energie}$

$=\frac{Literpreis}{Dichte\cdot Heizwert}$

$=\frac{\frac{1{,}50\,€}{l}}{0{,}75\,\frac{kg}{l}\cdot 43\,\frac{MJ}{kg}}=0{,}046\,\frac{€}{MJ}$

Elektrischer Strom kostet 2008 für Kleinverbraucher ca. 20 Ct pro kWh

$\frac{Preis}{Energie}=20\,\frac{€}{kWh}$

$=20\,\frac{0{,}01\,€}{kW\cdot 3600s}=0{,}20\,\frac{€}{3{,}6\,MJ}=0{,}056\,\frac{€}{MJ}$

Vordergründig sind die Energiekosten bei Benzin niedriger, aber man muss auch die Verwendung und deren Wirkungsgrad berücksichtigen. Mit wenigen Ausnahmen, z.B. bei der Wärmeerzeugung, dürfte elektrischer Strom preislich günstiger sein als Kraftstoff.

C Entwürfe

1 Lithium-Ionen-Akkumulator

Einem Bericht der vdi-nachrichten 28/2010 zufolge können Lithium-Ionen-Akkus aktuell 150 Wh/kg Energie speichern, erreichbar seien voraussichtlich 240 Wh/kg.

1.1 Wie schwer ist Benzin mit dem gleichen Energieinhalt?

1.2 Wie schwer wäre eine Akku mit dem Gegenwert von 50l Benzin?

1.3 Kalkulieren Sie mit den Wirkungsgraden der Motoren.

2 Ein Pumpspeicherkraftwerk hat eine Fallhöhe von 100 m und erzeugt elektrischen Strom mit η = 60%. Wie viel Wasser muss strömen, um einen PC mit einer Leistungsaufnahme von 300 W zu betreiben?

3 Die Standby-Schaltung eines ausgeschalteten Gerätes verbrauche10W elektrischer Leistung. Schätzen Sie mithilfe des Tabellenbuches ab, welche Masse CO_2 für dieses Gerät pro Jahr in einem Kohlekraftwerk ausgestoßen wird, wenn das Gerät durchgehend in Betrieb ist und der Gesamtwirkungsgrad von Stromproduktion und Transport η = 25% beträgt?

4 Dichte

4.1 Ferrit kristallisiert in einem kubisch-raum-zentrierten Gitter mit einer Gitterkonstante (=Kantenlänge der Elementarzelle) von 0,286 nm. Wie groß ist seine Dichte?

4.2 Austenit kristallisiert in einem kubisch-flächenzentrierten Gitter mit einer Gitterkonstante von 0,356 nm. Wie groß ist seine Dichte?

4.3 Austenit kann max. 2% Kohlenstoff (Masseprozent) aufnehmen. Wie groß ist in diesem Fall das Verhältnis der belegten zu den unbelegten Elementarzellen, wenn eine Elementarzelle des Austenit nicht mehr als ein Kohlenstoffatom aufnehmen kann?

4.4 Im Austenit können sich Kohlenstoffatome in den Raummitten oder in den Kantenmitten aufhalten. Ermitteln Sie, wo mehr Platz ist.

5

5.1 Ein Kupferdraht mit einen Durchmesser d = 1 mm dehnt sich um 10 mm, wenn er um 20K erwärmt wird.
Wie viel dehnt sich ein Kupferdraht mit 2 mm Durchmesser unter sonst gleichen Voraussetzungen?

6 Kühlschrank

6.1 Wie viel kostet es, wenn die Kühlschranktür so lange offen steht, bis die kalte Luft (4°C) aus dem Kühlschrank abgeflossen ist und durch Luft bei RT ersetzt wurde.

D Lösungsvorschläge für die Entwürfe

1 Lithium-Ionen-Akkumulator

Einem Bericht der vdi-nachrichten 28/2010 zufolge können Lithium-Ionen-Akkus aktuell 150 Wh/kg Energie speichern, erreichbar seien voraussichtlich 240 Wh/kg.

1.1 Spezifischer Heizwert (Benzin) H_U = 43 MJ/kg ([EuroTabM] „Heizwert“). Umrechnung:

$$H_U = 43\frac{MJ}{kg} = 43\frac{MWs}{kg} = 43\frac{MWs}{kg}\cdot\frac{1h}{3600s} \approx 12\frac{kWh}{kg}$$

Der Energiegehalt in Benzin ist pro kg etwa um den Faktor 50..80 mal größer als in ein Li-Akku.

1.2 Die Dichte von Benzin beträgt ρ = 0,75 kg/dm³. 50l Benzin wiegen also

$$m_{Benzin} = \rho\cdot V = 0{,}75\frac{kg}{dm^3}\cdot 50l = 37{,}5kg$$

Mit dem Faktor 50..80 ergibt sich das Akku Gewicht

$$m_{Akku} = 37{,}5kg\cdot(50..80) \approx 2..3t$$

1.3 Die Wirkungsgrade von Elektromotoren betragen etwa 90%, diejenigen von Verbrennungsmotoren etwa 30%. Das bedeutet, dass der Energiegehalt eines Akkus 3mal besser ausgenutzt werden kann als der eines Kraftstofftankes, demzufolge kann der Akku auch 3mal leichter dimensioniert werden. Gegen den Verbrennungsmotor spricht, dass sein Wirkungsgrad im Teillastbetrieb noch niedriger ist. Zugunsten des E-Antriebes spricht weiterhin, dass ein Teil der Energie beim Bremsen und Bergabfahren zurückgewonnen werden kann.

2 Leistung P ist Energie W pro Zeit t. Der Wirkungsgrad η muss die erforderliche Leistung verringern. Energie ist hier die potentielle Energie. Die Masse kann mit der Dichte in ein Volumen umgerechnet werden. Das Ergebnis ist ein Volumenstrom $\dot{V}$, d.h. Volumen pro zeit.

$$P = \frac{W}{t}\cdot\eta = \frac{m\cdot g\cdot h}{t}\cdot\eta = \frac{V\cdot\rho\cdot g\cdot h}{t}\cdot\eta \quad\rightarrow$$

$$\dot{V} = \frac{V}{t} = \frac{P}{\rho\cdot g\cdot h\cdot\eta} = \frac{300\,W}{1\frac{kg}{dm^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 100m\cdot 0{,}6}$$

$$\dot{V} = 0{,}5\frac{l}{s} = 30\frac{l}{min} = 1800\frac{l}{h} = 43{,}2\frac{m^3}{Tag}$$

3 Energieverbrauch W in einem Jahr:

$$W = P\cdot t = 10W\cdot 1\,Jahr\cdot 365\frac{Tag}{Jahr}\cdot 24\frac{h}{Tag} \approx 90kWh$$

Wegen des Wirkungsgrades muss wesentlich mehr Energie eingesetzt werden:

$$\eta = \frac{Wab}{W_{zu}} \quad\rightarrow w_{zu} = \frac{W_{ab}}{\eta} = \frac{90\,kWh}{25} = 360kWh$$

Der spezifische Heizwert von Steinkohle beträgt H_U = 30..34 MJ/kg ([EuroTabM] „Heizwert“). Daraus ergibt sich der Jahresbedarf an (Stein-)Kohle:

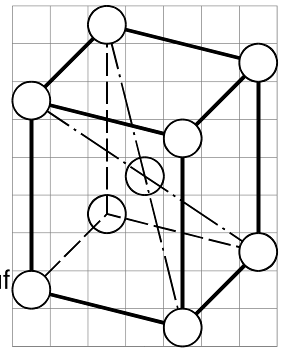
$$H_U = \frac{W}{m} \quad\rightarrow\quad m = \frac{W}{H_U} = \frac{360\,kWh}{30\,MJ/kg} \approx 40kg$$

Wenn man annimmt, dass Steinkohle aus Kohlenstoff mit der Atommasse 12 besteht, das sich mit 2 Teilen Sauerstoff (Atommasse 16) zu CO_2 (Atommasse 12 + 2 · 16 = 44) verbindet, kann man abschätzen, dass aus 40 kg Kohle etwa 150 kg CO_2 werden.

Tatsächlich wird Strom nicht nur aus Kohle produziert. Nach Angaben des Umweltbundesamtes liegt in deutschland der CO_2-Emmissionsfaktor für den Strommix der letzten Jahren bei etwa 600g/kWh mit fallender Tendenz
(Quelle: http://www.umweltbundesamt.de/energie/archiv/co2-strommix.pdf, 19.08.2010).
Das bedeutet, dass 10W Stromverbrauch ca. 50 kg CO_2 pro Jahr verursachen, bezogen auf den in allen deutschen Kraftwerken produzierten Strom.

4 Dichte

4.1 Ferrit:



Volumen einer Elementarzelle:

$$V = (0{,}286nm)^3$$

Anzahl der Atome in einer Elementarzelle:

$$N = 8\cdot\frac{1}{8} + 1 = 2$$

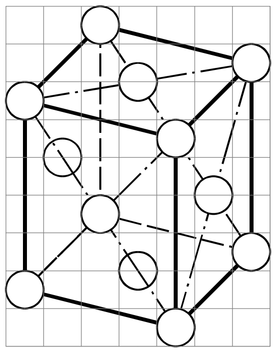
(8 Eckatome verteilen sich auf je 8 Elementarzellen)

Mit der Atommasse m_{Fe} in g pro mol erhält man die theoretische Dichte

$$\rho = \frac{N}{V}\cdot m_{Fe} = \frac{2}{(0{,}286\,nm)^3}\cdot\frac{55{,}847\,g}{6{,}02204\cdot 10^{23}} = 7{,}9\frac{kg}{dm^3}$$

Praktisch ist die Dichte wegen Gitterfehlern etwas niedriger.

4.2 Austenit:



Anzahl der Atome in einer Elementarzelle:

$$N = 8\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{2} = 4$$

Theoretische Dichte:

$$\rho = \frac{4}{(0{,}356nm)^3}\cdot\frac{55{,}847\,g}{6{,}02204\cdot 10^{23}} = 8{,}2\frac{kg}{dm^3}$$

Auch dieser Wert ist ungenau, macht aber deutlich, dass Austenit eine höhere Dichte als Ferrit besitzt.

4.3 Mit dem Molmassen von Eisen und Kohlenstoff kann man die Massenprozent in das Verhältnis ihrer Teilchen umrechnen:

$$\frac{\text{Masse (x mol Eisen)}}{\text{Masse (1 mol Kohlenstoff)}} = \frac{98\%}{2\%}$$

$$\frac{x\cdot 55{,}8g}{1\cdot 12g} = \frac{98}{2} \quad\rightarrow\quad x = \frac{98\cdot 12}{2\cdot 55{,}8} = 10{,}5$$

bedeutet, dass 10,5 Atome Eisen auf 1 Atom Kohlenstoff kommen (mol zu Atomen gekürzt).

Da eine Elementarzelle von Austenit 4 Atome enthält (s.o.), ist maximal 1 von 2,6 Elementarzellen mit einem Kohlenstoffatom besetzt.

4.4 Raum- und Kantenmitten in kfz-Gittern können durch Verschiebung des Bezugssystems ausgetauscht werden und sind deshalb gleichwertig. Wenn man sich die Eisenatome als Kugeln mit den größtmöglichen Durchmesser D denkt, haben die Lücken einen Durchmesser d = 0,41 · D.