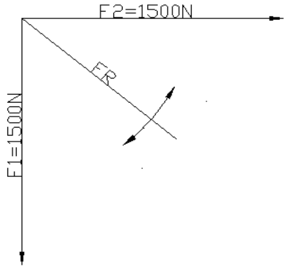
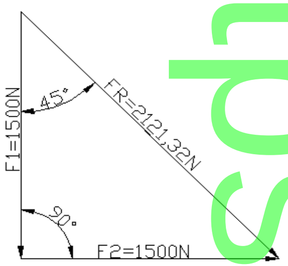
Lösungsvorschläge

In den Aufgaben ist der Kräftemaßstab nicht angegeben, weil es sehr umständlich gewesen wäre, den endgültig ausgedruckten Maßstab festzustellen und anzugeben. Ein Schüler muss aber wissen, dass er den Maßstab angeben muss.

1 Seilrollen

1.a LP Seilrolle KP M_K = ...





Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

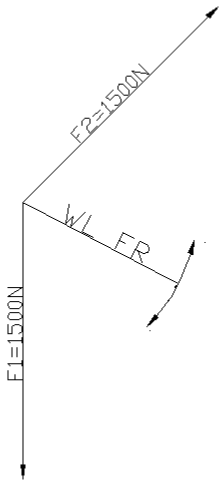
$$F_{Gx}=F_G\cdot\cos\alpha_G=2\,kN\cdot\cos(270°)=0\,kN$$
$$=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{(1500\,N)^2+(1500\,N)^2}$$
$$=2121\,N$$
$$\tan\alpha=\frac{F_2}{F_1}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\arctan\frac{F_2}{F_1}=\arctan\frac{1500\,N}{1500\,N}=45°$$

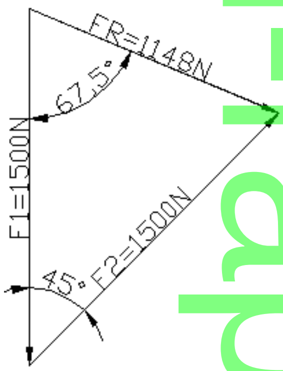
Rechnerische Lösung nach Algorithmus (alle Winkel von der x-Achse aus)

$$F_{1x}=F_1\cdot\cos\alpha_1=1500\,N\cdot\cos 270°=0\,N$$
$$F_{1y}=F_1\cdot\sin\alpha_1=1500\,N\cdot\sin 270°=-1500\,N$$
$$F_{2x}=F_2\cdot\cos\alpha_2=1500\,N\cdot\cos 0°=1500\,N$$
$$F_{2y}=F_2\cdot\sin\alpha_2=1500\,N\cdot\sin 0°=0\,N$$

$$F_{Rx}=F_{1x}+F_{2x}=0\,N+1500\,N=1500\,N$$
$$F_{Ry}=F_{1y}+F_{2y}=-1500\,N+0\,N=-1500\,N$$
$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=\sqrt{(1500\,N)^2+(-1500\,N)^2}=2121\,N$$
$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Ry}}=\arctan\frac{-1500\,N}{1500\,N}=-45°$$

1.b LP Seilrolle KP M_K = ...





Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_{Gx}=F_G\cdot\cos\alpha_G=2\,kN\cdot\cos(270°)=0\,kN$$
$$=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{(1500\,N)^2+(1500\,N)^2}=2121\,N$$
$$\tan\alpha=\frac{F_2}{F_1}\quad\Rightarrow\quad\alpha=\arctan\frac{F_2}{F_1}=\arctan\frac{1500\,N}{1500\,N}=45°$$

Rechnerische Lösung nach Algorithmus (alle Winkel von der x-Achse aus)

$$F_{1x}=F_1\cdot\cos\alpha_1=1500\,N\cdot\cos 270°=0\,N$$
$$F_{1y}=F_1\cdot\sin\alpha_1=1500\,N\cdot\sin 270°=-1500\,N$$
$$F_{2x}=F_2\cdot\cos\alpha_2=1500\,N\cdot\cos 45°=1060{,}7\,N$$
$$F_{2y}=F_2\cdot\sin\alpha_2=1500\,N\cdot\sin 45°=1060{,}7\,N$$

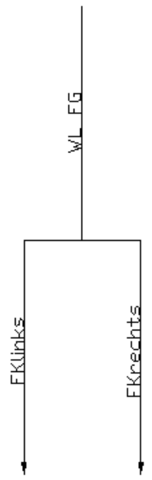
$$F_{Rx}=F_{1x}+F_{2x}=0\,N+1060{,}7\,N=1060{,}7\,N$$
$$F_{Ry}=F_{1y}+F_{2y}=-1500\,N+1060{,}7\,N=-439{,}3\,N$$
$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=\sqrt{(1060{,}7\,N)^2+(-439{,}3\,N)^2}$$
$$=1048\,N$$
$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Ry}}=\arctan\frac{-439{,}3\,N}{1060{,}7\,N}=-22{,}5°$$

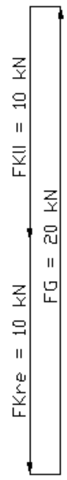
2 Kette

Im Folgenden wird der Kranhaken freigeschnitten, weil so die Darstellung einfacher wird. Die Kraft in der Kette über dem Haken entspricht F_G, allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen.

In der Aufgabe a) verläuft die Kette doppelt zwischen Haken und Last. Die Aufhängung ist so, dass beide Ketten voll tragen können.

2.a LP Haken KP M_K=..

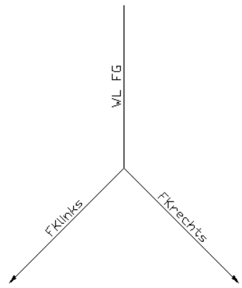


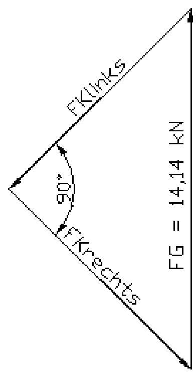


Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_G=F_{Kli}+F_{Kre}=10\,kN+10\,kN=20\,kN$$

2.b LP Haken KP M_K=..

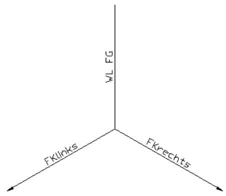




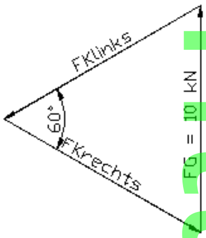
Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$\frac{F_G/2}{F_{Kli}}=\sin\frac{90°}{2}\quad\Rightarrow$$
$$F_G=2\cdot F_{Kli}\cdot\sin 45°=2\cdot 10\,kN\cdot\sin 45°=14{,}1\,kN$$

2.c LP Haken



KP M_K=..



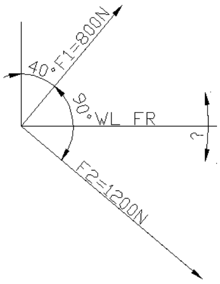
Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$\frac{F_G/2}{F_{Kli}}=\sin\frac{60°}{2} \quad \Rightarrow$$

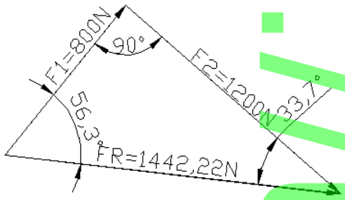
$$F_G=2\cdot F_{Kli}\cdot\sin 30°=2\cdot 10\,kN\cdot\sin 30°=10\,kN$$

3 Freileitungsmast

LP Mast



KP M_K = ...



Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{(800\,N)^2+(1200\,N)^2}=1442\,N$$

$$\alpha=\arctan\frac{1200\,N}{800\,N}=56{,}3°$$

Rechnerische Lösung nach Algorithmus (alle Winkel von der x-Achse aus) ist z.B. zweckmäßig, wenn kein rechter Winkel vorliegt.

$$F_{1x}=F_1\cdot\cos\alpha_1=800\,N\cdot\cos 50°=514{,}2\,N$$

$$F_{1y}=F_1\cdot\sin\alpha_1=800\,N\cdot\sin 50°=612{,}8\,N$$

$$F_{2x}=F_2\cdot\cos\alpha_2=1200\,N\cdot\cos(-40°)=919{,}6\,N$$

$$F_{2y}=F_2\cdot\sin\alpha_2=1200\,N\cdot\sin(-40°)=-771{,}3\,N$$

$$F_{Rx}=F_{1x}+F_{2x}=514{,}2\,N+919{,}6\,N=1433{,}8\,N$$

$$F_{Ry}=F_{1y}+F_{1y}=612{,}8\,N-771{,}3\,N=-158{,}5\,N$$

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=\sqrt{(1433{,}8\,N)^2+(-158{,}5\,N)^2}=1442\,N$$

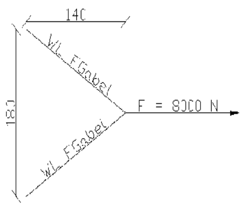
$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Ry}}=\arctan\frac{-158{,}5\,N}{1433{,}8\,N}=-6{,}3°$$

gegen die positive x-Achse

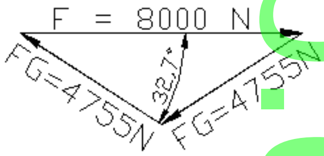
4 Zuggabel

Der Winkel der Gabeln sollte konstruiert und nicht berechnet werden, weil es schneller geht und man dabei weniger Fehler macht !

LP Mast



KP M_K = ...



Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$\alpha=\arctan\frac{1800/2\,mm}{1400\,mm}=32{,}7°$$

$$F_G=\frac{F}{2\cdot\cos\alpha}=\frac{8000\,N}{2\cdot\cos 32{,}7°}=4755\,N$$

Rechnerische Lösung mit dem Sinussatz (geht immer beim Zerlegen von Kräften)

Winkel innerhalb des Dreieckes $F_{Sp}-F_1-F_3$

$$\alpha_{FG}=\arctan\frac{1800/2\,mm}{1400\,mm}=32{,}7°$$

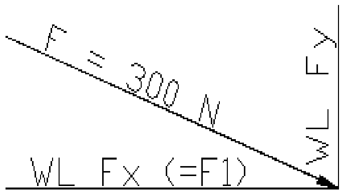
$$\alpha_F=180°-2\cdot\alpha_{FG}=180°-2\cdot 32{,}7°=114{,}5°$$

$$\textit{Sinussatz}\ :\quad \frac{F}{\sin\alpha_F}=\frac{F_G}{\sin\alpha_{FG}} \quad\Rightarrow$$

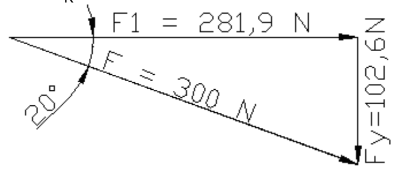
$$F_G=F\cdot\frac{\sin\alpha_{FG}}{\sin\alpha_F}=8000\,N\cdot\frac{\sin 32{,}7°}{\sin 114{,}5°}=4755\,N$$

5 Wagen

LP Deichsel



KP M_K = ...



F_y ist nicht gefragt, muss aber nebenher gelöst werden. Die Richtungen von F_x und F_y ergeben sich aus der Aufgabenstellung. Wenn nach der Gegenkraft gefragt wäre, wären F_x und F_y entgegengesetzt.

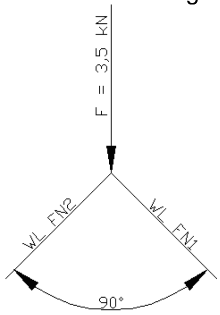
Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_x=F\cdot\cos 20°=300\,N\cdot\cos 20°=281{,}9\,N$$

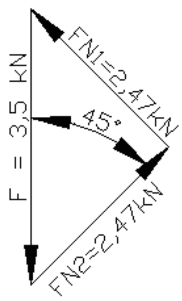
$$F_y=F\cdot\sin 20°=300\,N\cdot\sin 20°=102{,}6\,N$$

6 V-Führung

LP obere Führung



KP M_K = ...



Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

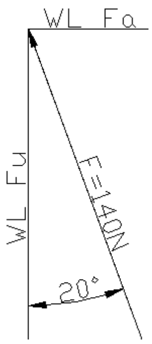
$$F_{N1}=F_{N2}=F\cdot\cos 45°=3{,}5\,kN\cdot\cos 45°$$

$$F_{N1}=F_{N2}=2{,}47\,kN$$

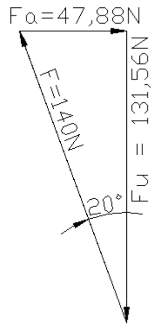
Man muss die obere Führung betrachten, weil diese die Kraft F mitbringt. Deshalb wirken auch F_{N1} und F_{N2} anders als in der Zeichnung im Buch, weil man die Wirkung auf die obere Führung betrachtet.

7 Schrägstirnrad

LP Zahn



KP M_K = ...



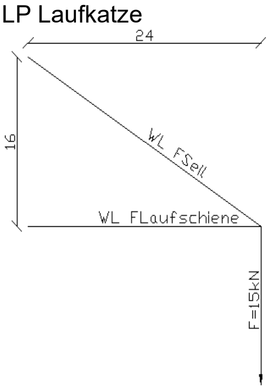
Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_u = F \cdot \cos 20° = 140\,N \cdot \cos 20° = 131{,}6\,N$$
$$F_a = F \cdot \sin 20° = 140\,N \cdot \sin 20° = 47{,}9\,N$$

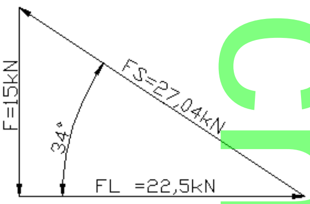
Die Umfangskraft F_u ist die Kraft, die das Drehmoment von einem Zahnrad auf das andere überträgt.
Die Normalkraft F wird von einem Zahn auf den anderen über die Berührfläche übertragen. F ist größer als F_u, weil die Zahnflanke nicht genau rechtwinklig zur Bewegungsrichtung steht.
Die Axialkraft F_a entsteht durch die schräge Zahnflanke und drückt das Zahnrad in Achsrichtung.
Schrägstirnräder haben eine größere Laufruhe und werden in Pkw eingesetzt (außer Rückwärtsgang). Sie benötigen aber stärkere axiale Lager, deshalb verzichtet man in der Formel 1 darauf.

8 Schwenkkran

LP Laufkatze



KP M_K = ...



Der Winkel des Halteseiles wird in der zeichnerischen Lösung nicht gerechnet, sondern konstruiert. Tatsächlich geht dies schneller und mit weniger Fehlern !

Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan:

$$\tan\alpha = \frac{1600\,mm}{2400\,mm} \quad \Rightarrow \alpha = 33{,}7°$$
$$F_S = \frac{F}{\sin 33{,}7°} = 27\,kN$$
$$F_L = \frac{F}{\tan 33{,}7°} = 22{,}5\,kN$$

Man kann auch ohne Winkelfunktionen rechnen, wenn man F_L mit dem Strahlensatz ermittelt:

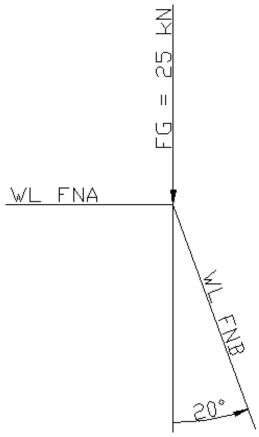
$$F_L = F \cdot \frac{2400\,mm}{1600\,mm} = 15\,kN \cdot \frac{3}{2} = 22{,}5\,kN$$
$$F_S = \sqrt{F^2 + F_L^2} = \sqrt{(15\,kN)^2 + (22{,}5\,kN)^2} = 27\,kN$$

Die Ähnlichkeit der Lösungen erkennt man, wenn man tan α statt des Längenverhältnisses einsetzt.

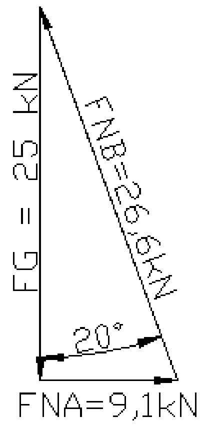
9 Keilspanner

Beim Keilspanner muss man sich schrittweise vorarbeiten. Man beginnt mit dem oberen Keil und erhält F_{NA} und F_{NB}. Dann setzt man mit dem unteren Keil fort und erhält F und F_{NC}. Die Richtungen der Kräfte hängt vom gerade betrachteten Teil ab. Sie müssen nicht mit den Richtungen in der Aufgabe übereinstimmen und können von Teilaufgabe zu Teilaufgabe wechseln.

9.a LP oberer Keil



KP M_K = ...

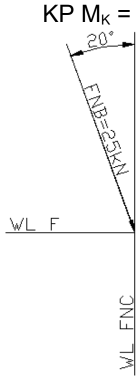


Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_{NA} = F_G \cdot \tan 20° = 25\,kN \cdot \tan 20° = 9{,}1\,kN$$
$$F_{NB} = \frac{F_G}{\cos 20°} = \frac{25\,kN}{\cos 20°} = 26{,}6\,kN$$

9.b LP unterer Keil

KP M_K = ...



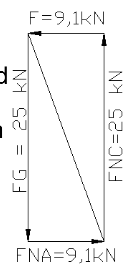
F_{NB} ist aus Aufgabe a) bekannt, wirkt aber in die andere Richtung (Druckkraft!).

Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

$$F_{NC} = F_{NB} \cdot \cos 20° = 26{,}6\,kN \cdot \cos 20° = 25\,kN$$
$$F = F_{NB} \cdot \sin 20° = 26{,}6\,kN \cdot \sin 20° = 9{,}1\,kN$$

9.c Die Lösung ist in b) enthalten.

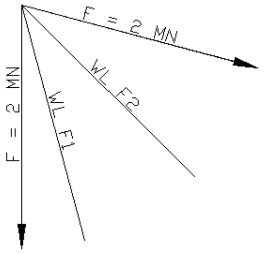
Wenn man beide Keile gleichzeitig freimacht, kann man die beiden Kräftepläne aus a) und b) kombinieren. Man erkennt, dass sich F und F_{NA} genauso aufheben wie F_G und F_{NC}.



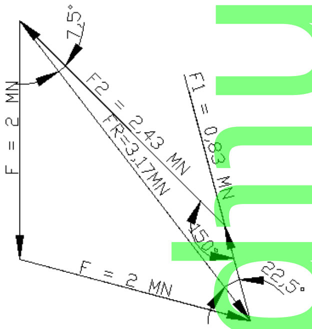
Die diagonale Kraft F_{NB} wirkt in den einzelnen Kräfteplänen aus a) und b) entweder nach oben oder nach unten, je nachdem welcher Keil betrachtet wird.
Wenn man beide Keile freimacht, kann man die beiden Varianten von F_{NB} berücksichtigen, aber sie heben sich auf, weil sie ein inneres Kräftepaar bilden. Dies gilt für alle Kräfte innerhalb eines freigemachten Bauteiles, deshalb müssen beim Freimachen nur Kräfte berücksichtigt werden, die die Grenzen des Bauteiles überschreiten.

10 Kran

LP Seilrolle



KP M_K = ..



Beide Stäbe sind Druckstäbe.

Rechnerische Lösung nach Algorithmus (alle Winkel von der x-Achse aus). Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan ist mir zu umständlich :-)

$$F_{ux}=F_u\cdot\cos\alpha_u=2\,MN\cdot\cos 270°=0\,MN$$
$$F_{uy}=F_u\cdot\sin\alpha_u=2\,MN\cdot\sin 270°=-2\,MN$$
$$F_{ox}=F_o\cdot\cos\alpha_o=2\,MN\cdot\cos(-15°)=1{,}932\,MN$$
$$F_{oy}=F_o\cdot\sin\alpha_o=2\,MN\cdot\sin(-15°)=-0{,}518\,MN$$

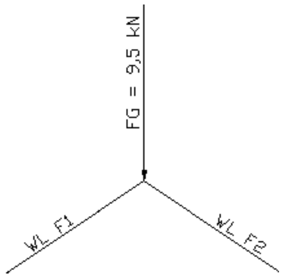
$$F_{Rx}=F_{ux}+F_{ox}=0\,MN+1{,}932\,MN=1{,}932\,MN$$
$$F_{Ry}=F_{uy}+F_{oy}=-2\,MN-0{,}518\,MN=-2{,}518\,MN$$
$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=\sqrt{(1{,}932\,MN)^2+(-2{,}518\,MN)^2}$$
$$=3{,}174\,MN$$
$$\alpha_R=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Ry}}=\arctan\frac{-2{,}518\,MN}{1{,}932\,MN}=-52{,}5°$$
gegen die positive x-Achse

Winkel innerhalb des Dreieckes $F_R-F_1-F_2$
$$\alpha_{F_1}=52{,}5°-45°=7{,}5°$$
$$\alpha_{F_2}=90°-52{,}5°-15°=22{,}5°$$
$$\alpha_{F_R}=180°-75°+45°=150°$$
$$Sinussatz:\quad\frac{F_R}{\sin\alpha_{FR}}=\frac{F_1}{\sin\alpha_{F1}}=\frac{F_2}{\sin\alpha_{F2}}\Rightarrow$$
$$F_1=F_R\cdot\frac{\sin\alpha_{F1}}{\sin\alpha_{FR}}=3{,}174\,MN\cdot\frac{\sin 7{,}5°}{\sin 150°}=0{,}83\,MN$$
$$F_2=F_R\cdot\frac{\sin\alpha_{F2}}{\sin\alpha_{FR}}=3{,}174\,MN\cdot\frac{\sin 22{,}5°}{\sin 150°}=2{,}43\,MN$$

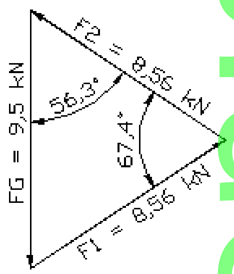
11 Wagenheber

Beim Wagenheber muss man sich schrittweise vorarbeiten. Man beginnt mit dem obersten Verbindungsbolzen zwischen F_1, F_2 und F (= FG) und erhält F_1 und F_2. Dann macht man mit einem seitlichen Bolzen links oder rechts weiter und erhält F_3, (F_4) und die Spindelkraft. Zuletzt könnte man den unteren Bolzen freimachen, aber einfacher ist es, wenn man den ganzen Wagenheber betrachtet.

11.a LP oberer Bolzen



KP M_K = …



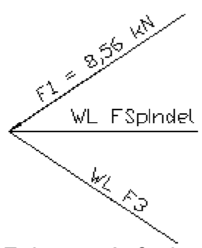
Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

Winkel α *zwischen* F_1 *und* F_2
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{480/2\,mm}{320/2\,mm}\quad\Rightarrow\quad\frac{\alpha}{2}=\arctan\frac{480}{320}=56{,}3°$$
$$\frac{F/2}{F_2}=\cos\frac{\alpha}{2}\quad\Rightarrow$$
$$F_2=\frac{F}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{9{,}5\,kN}{2\cdot\cos 56{,}3°}=8{,}56\,kN$$
$$F_1=F_2=8{,}56\,kN$$

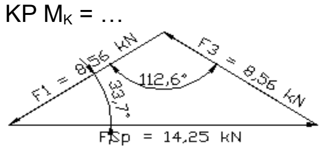
Rechnerische Zerlegung der gegebenen Kräfte

Winkel innerhalb des Dreieckes $F_G-F_1-F_2$
$$\alpha_{F1}=\alpha_{F2}=\arctan\frac{480/2\,mm}{320/2\,mm}=56{,}3°$$
$$\alpha_{FG}=180°-\alpha_{F1}-\alpha_{F2}=180°-2\cdot 56{,}3°=67{,}4°$$
$$Sinussatz:\quad\frac{FG}{\sin\alpha_{FG}}=F\frac{1}{\sin\alpha_{F1}}=F\frac{2}{\sin\alpha_{F2}}\Rightarrow$$
$$F_1=F_G\cdot\frac{\sin\alpha_{F1}}{\sin\alpha_{FG}}=9{,}5\,kN\cdot\frac{\sin 56{,}3°}{\sin 67{,}4°}=8{,}56\,kN$$
$$F_2=F_1=8{,}56\,kN$$

11.b LP linker Bolzen



KP M_K = …



F_1 ist aus Aufgabe a) bekannt, wirkt aber in die andere Richtung (Druckkraft!). Man kann auch den rechten Bolzen freimachen und erhält ein spiegelbildliches Bild. Deshalb sind F_3 und F_4 betragsmäßig gleich.

Rechnerische Lösung aus dem Kräfteplan

Winkel β *zwischen* F_2 *und* F_3
$$\frac{\beta}{2}=\frac{180°-\alpha}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}=90°-56{,}3°=33{,}7°$$
$$\frac{F/2}{F_2}=\cos\frac{\alpha}{2}\quad\Rightarrow$$
$$F_2=\frac{F}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{9{,}5\,kN}{2\cdot\cos 56{,}3°}=8{,}56\,kN$$
$$F_1=F_2=8{,}56\,kN$$

Rechnerische Zerlegung der gegebenen Kräfte
$$\frac{\beta}{2}=\frac{180°-\alpha}{2}=90°-\frac{\alpha}{2}=90°-56{,}3°=33{,}7°$$
$$\frac{F/2}{F_2}=\cos\frac{\alpha}{2}\quad\Rightarrow$$
$$F_2=\frac{F}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{9{,}5\,kN}{2\cdot\cos 56{,}3°}=8{,}56\,kN$$
$$F_1=F_2=8{,}56\,kN$$

11.c Wenn man den ganzen Wagenheber freimacht, wirken nur zwei Kräfte auf ihn, nämlich F und F_N. Da sich beide Kräfte aufheben müssen, ist F_N = F = 9,5 kN.